Résolution des exercices du Hartshorne, chapitre II-2

Colas Bardavid

jeudi 12 mai 2005

Exercice 2.9

La propriété qu'on cherche à démontrer est uniquement topologique. On a donc ici juste besoin qu'un schéma affine est homéomorphe à un Spec A.

Cas affine

On commence par traiter le cas affine.

On considère donc Z un fermé irréductible de Spec A. On cherche $\mathfrak{P} \in$ Spec A tel que $V(\mathfrak{P}) = Z$. Z est définit par $V(I)$. Comme $V(I) = V(\sqrt{I})$, on va plutôt tester si $\sqrt{I}$ est premier. Soit donc $f, g \in A$ telles que $fg \in \sqrt{I}$. Il existe donc $n \geq 1$ tel que $(fg)^n \in I$. Ainsi, si $\mathfrak{P} \in V(I)$, $(fg)^n \in \mathfrak{P}$ et donc f ou g appartiennent à $\mathfrak{P}$. Donc : $V(I) \subset V(f) \cup V(g)$. Donc : $V(I) = (V(f) \cap V(I)) \cup (V(g) \cap V(I))$. Comme $V(I)$ est irréductible, on a par exemple $V(I) \cap V(f) = V(I)$ donc $V(I) \subset V(f)$ et donc $\sqrt{(f)} \subset \sqrt{I}$ et donc $f \in \sqrt{I}$. On a montré ainsi que $\sqrt{I}$ est premier et donc que $Z = \overline{\{x_{\sqrt{I}}\}}$.

Il est évident dans le cas affine que ce point générique est unique.

Cas général

Existence

Soit X un schéma recouvert par les U_i qui sont des ouverts affines. Soit en particulier U l'un des U_i tel que $U \cap Z$ soit non-vide. Soit Z un fermé irréductible de X. Alors, $Z \cap U$ est un fermé de U ; par ailleurs, $Z \cap U$ est un ouvert de Z, irréductible. Donc $Z \cap U$ est irréductible. On sait donc qu'il existe un unique $\xi \in U$ tel que $\overline{\{\xi\}}_U = Z \cap U$.

Mais : $\overline{\{\xi\}}_X \cap U$ est un fermé de U qui contient ξ ; donc : $Z \cap U = \overline{\{\xi\}}_U \subset \overline{\{\xi\}}_X \cap U \subset \overline{\{\xi\}}_X$.

Mais $Z \cap U$ est un ouvert de Z donc est dense dans Z donc nécessairement $Z \subset \overline{\{\xi\}}_X$; l'inclusion inverse est vraie car Z est fermé et que $\xi \in Z$: $Z = \overline{\{\xi\}}_X$.

Unicité

Si ξ est un point générique de Z, alors tout ouvert qui rencontre Z contient ξ. Donc U un ouvert affine de X qui rencontre Z : $\xi \in U$. Montrons alors que ξ est un point générique de $U \cap Z$. Soit $x \in U \cap Z$. Soit V un ouvert de $U \cap Z$ qui contient x : V s'écrit $V = W \cap U \cap Z$ avec $x \in W$. Donc $\xi \in W$. Donc $\xi \in V$. Donc x est adhérent à ξ. Donc ξ est bien un point générique de $U \cap Z$ et donc est unique.

Exercice 2.14

On utilise librement dans cette résolution les résultats du texte **Anneaux, modules gradués et** Proj .

On rappelle la notation $\mathbf{Ann_{grad}}$.

(a)

Si tout élément de S_+ est nilpotent, vu que les nilpotent sont dans tous les idéaux premiers, tous les idéaux premiers contiennent S_+ et donc Proj S est vide.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in S_+$ non-nilpotent. Alors, la partie mulitplicative $S = \{x^n, n \in \mathbf{N}^*\}$ ne contient pas 0. On sait alors qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ homogène n'intersectant pas S. En particulier, $S_+ \not\subset \mathfrak{P}$ et donc $\mathfrak{P} \in \text{Proj } S$, qui est donc non-vide.

(b)

Soient $S, T \in \mathbf{Ann_{grad}}$ et $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{Ann_{grad}}}(S, T)$.

On note $U = \{\mathfrak{P} \in \text{Proj } T \mid \varphi(S_+) \not\subset \mathfrak{P}\}$. On veut montrer que U est un ouvert de Proj T. On regarde le complémentaire de U. C'est $\{\mathfrak{P} \in \text{Proj } T \mid \varphi(S+) \subset \mathfrak{P}\}$.

Notons $\widehat{\varphi(S_+)}$ l'idéal homogène engendré par $\varphi(S+)$. Alors, puisque tous les $\mathcal{P} \in \text{Proj } T$ sont des idéaux homogènes, on a l'équivalence entre $\varphi(S+) \subset \mathfrak{P}$ et $\widehat{\varphi(S_+)} \subset \mathfrak{P}$.

Donc, le complémentaire de U est $\left\{\mathfrak{P} \in \text{Proj } T \mid \widehat{\varphi(S_+)} \subset \mathfrak{P}\right\}$, qui est bien un fermé de Proj T.

Construisons maintenant l'application $f : U \to \text{Proj } s$. À un $\mathfrak{P} \in U$, on associe $\varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ qui est bien un idéal homogène premier. Il faut juste vérifier que $S_+ \not\subset \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$. Si on avait $S_+ \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$, on aurait $\varphi(S_+) \subset \mathfrak{P}$, ce qui est exclu.

Cette application est bien continue : si $F = V(I)$ est un fermé de Proj S, alors on a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} \in f^{-1}(V(I)) &\iff f(\mathfrak{P}) \in V(I) \\ &\iff I \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{P}) \\ &\iff \varphi(I) \subset \mathfrak{P}\end{aligned}$$

En notant $\widehat{\varphi(I)}$ l'idéal homogène engendré par $\varphi(I)$, on a donc $f^{-1}(F) = V(\widehat{\varphi(I)})$, qui est donc un fermé.

Pour déterminer un morphisme entre U et Proj S, il faut encore décrire l'action sur les faisceaux structuraux.

Soit donc $V \underset{\circ}{\hookrightarrow} \text{Proj } S$. On choisit la description des faisceaux structuraux à la Hartshorne. On définit :

$$f_V^{\#} : \begin{array}{rl} \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(V) & \to \mathcal{O}_U(f^{-1}(U)) \\ s & \mapsto f_V^{\#}(s) : \begin{array}{rl} f^{-1}(V) & \to \coprod_{\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)} T_{(\mathfrak{p})} \\ \mathfrak{q} & \mapsto \varphi\left(s(f(\mathfrak{q}))\right) \end{array} \end{array} .$$

où φ s'étend naturellement à $T_{(\mathfrak{p})} \to S_{(f(\mathfrak{p}))}$.

On vérifie que $f_V^{\#}$ est bien définie (voir la définition des faisceaux structuraux par Hartshorne). Ces flèches définissent bien une transformation naturelle.

(Pfff!!)

(c)

On ne répond que partiellement à cette question.

On suppose que pour $d \geq d_0$, $\varphi_d : S_d \to T_d$ est un isomorphisme (de groupes abéliens).

Montrons que $U = \text{Proj } T$. Soit $\mathfrak{P} \in \text{Proj } T$. Si $\varphi(S_+) \subset \mathfrak{P}$, alors, $T_d \subset \mathfrak{P}$ pour $d \geq d_0$, car, à partir de ce rang, $\varphi_d(S_d) = T_d$. Or, ceci est impossible : un $\mathfrak{P} \in \text{Proj } T$ ne peut pas être plein à partir d'un certain rang (*cf.* le texte sur les anneaux gradués). Donc : $U = \text{Proj } T$.

Montrons maintenant que f est bijective.

Pour l'injectivité : si $\varphi^{-1}(\mathfrak{P}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{Q})$, alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{P}_d) = \varphi^{-1}(\mathfrak{P})_d = \varphi^{-1}(\mathfrak{Q}_d)$. Pour $d \geq d_0$, on a donc $\mathfrak{P}_d = \mathfrak{Q}_d$. On sait que cela implique $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ (*cf.* le texte sur les anneaux gradués).

Pour la surjectivité : on renvoit à *EGA II*, p. 22 qui dit que lorsqu'on connaît la trace à l'infini d'un ensemble qui a les mêmes propriétés qu'un idéal premier, alors, c'est bien la trace d'un idéal premier.

Montrons alors que f est bicontinue. Soit donc $F = V(I)$ un fermé de Proj T. $f(F)$ est l'ensemble $\left\{\varphi^{-1}(\mathfrak{P}) \mid I \subset \mathfrak{P}\right\}$. On aimerait montrer que cet ensemble est $\left\{\mathfrak{Q} \mid \varphi^{-1}(I) \subset \mathfrak{Q})\right\}$. D'abord, on a bien : $\left\{\varphi^{-1}(\mathfrak{P}) \mid I \subset \mathfrak{P}\right\} \subset \left\{\mathfrak{Q} \mid \varphi^{-1}(I) \subset \mathfrak{Q})\right\}$. Réciproquement, soit $\mathfrak{Q} \in \text{Proj } S$ tel que $\varphi^{-1}(I) \subset \mathfrak{Q}$. À mon avis, on s'en sort avec la même proposition d'*EGA II*.

Pour les faiscaux structuraux, à mon avis c'est plus facile, il suffit de trouver une écriture des éléments de $S_{(\mathfrak{p})}$ qui ne fasse intervenir que des éléments de S_d avec d grand.

(d)

Je passe.

Exercice 2.16

(a)

C'est ultra-classique (?) et de toute façon, je l'ai fait dans un autre papier (*Mettons les mains dans le cambouis pour étuider un morphisme de schémas*).

(b)

Soit $(U_i)_{i\leq N}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. Soit $U = U_i$ l'un de ces ouverts affine. On travaille alors avec $b = a|_U$ et $g = f|_U$. On a bien que $b|_{D(g)} = (a|_{D(f)})|_U$ donc est nulle. Cela signifie que b est nulle dans $\mathcal{O}_U(U)_g$ et donc qu'il existe n un entier tel que $g^n b = 0$. C'est-à-dire : $(f^n a)|_U = 0$.

Comme on n'a qu'un nombre fini d'ouverts affines, c'est bon, on peut prendre le maximum des n et ça marche, grâce à la propriété de définition locale des faisceaux.

(c)

Soit $b \in \mathcal{O}_X(D(f))$. On travaille d'abord sur un ouvert affine U : quitte à tout restreindre à U, on peut supposer qu'on travaille dans un schéma affine. Un élément $b \in \mathcal{O}_U(D(f))$ est du type $\frac{c}{f^n}$. Donc : la restriction de c à $D(f)$ est bien $f^n b$.

On fait ça sur les ouverts U_i que nous donne l'énoncé. Quitte à multiplier les c_i qu'on obtient sur les ouverts U_i par des puissances de f, on peut supposer que sur chaque ouvert U_i, la restriction de c_i à $D(f|_{U_i})$ est $(f^n b)|_{U_i}$ où le n ne dépend pas de i.

Maintenant, il faut recoller les c_i entre eux. Sur $U_i \cap U_j$, c_i et c_j ont la même restriction sur l'ouvert $D(f|_{U_i \cap U_j})$. D'après l'item précédent, on sait donc que il existe $m(i,j)$ tel que $f^{m(i,j)}(c_i|_{U_i\cap U_j} - c_j|_{U_i \cap U_j}) = 0$.

On peut prendre m le plus grand des $m(i,j)$ et en remultipliant les c_i par f^m, on voit que les c_i se recollent bien sur leurs intersections.

Par définition locale, on conclut.

(d)

Maintenant, c'est facile.

Pour commencer, on rappelle que f est inversible quand elle est restreinte à $D(f)$ (*cf. Propriétés schématiques qu'on peut tester sur les germes*).

On a donc une flèche de $\mathcal{O}_X(X)_f$ dans $\mathcal{O}_X(D(f))$:

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(X)_f & \to & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \frac{g}{f^n} & \mapsto & g|_{D(f)}(f|_{D(f)}{}^{-1})^n \end{array} .$$

Cette flèche est bien injective. Si $\varphi(\frac{g}{f^n})$ est nulle dans $\mathcal{O}_X(D(f))$, alors ma restriction de g est nulle. Comme notre schéma est quasi compact, on sait alors qu'il existe m entier tel que $gf^m = 0$. Cela veut dire que g et donc en particulier $\frac{g}{f^n}$ sont nuls dans le localisé.

Cette flèche est surjective. Soit $g \in \mathcal{O}_X(D(f))$. D'après l'item précédent, on sait qu'il existe m tel que gf^m soit la restriction de c. On vérifie alors que ça marche.

Exercice 2.18

Cet exercice est résolu dans le texte **Liens entre la flèche $X \to Y$ et la flèche $f_Y^{\#} : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$.**
