Résolution des exercices du Hartshorne, chapitre I-1

Colas Bardavid

jeudi 12 mai 2005

Exercice 1.7

(a)

Notons d'abord que les propriétés concernant les ouverts et les fermés sont simplement duales l'une de l'autre. Il suffit donc de montrer que X est noethérien ssi dans toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés on peut trouver un élément minimal.

Supposons X noethérien. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés. Si on ne peut pas trouver d'élément minimal : F_{i_0} n'est pas minimal. Donc, il existe $F_{i_1} \subsetneq F_{i_0}$. On itère et on trouve une suite strictement décroissante de fermés.

Si toute famille de fermé a a un élément minimal, on applique cette propriété a une suite décroissante et le caractère noethérien tombe directement.

(b)

Soit X noethérien. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Supposons qu'on ne puisse pas en extraire un sous-recouvrement fini. Cela veut dire que $O_0 = U_{i_0}$ est différent de X. Donc il y a un x dans X en dehors de O_0. Soit U_{i_1} qui contient x et soit $O_1 = O_0 \cup U_{i_1}$. O_1 n'est pas X, est strictement plus grand que O_0 et on peut itérer. On obtient une suite strictement croissante d'ouverts. C'est absurde.

(c)

Soit A une partie de X, un espace topologique noethérien. Soit $(O_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts de A croissante : pour chaque i, onécrit $O_i = A \cap \widetilde{O}_i$, où $\widetilde{O}_i$ est un ouvert de X. Le problème, c'est que les $\widetilde{O}_i$ ne sont pas forcément croisants.

On définit donc par récurrence $O'_1 = \widetilde{O}_i$ et $O'_i = \widetilde{O}_i \cup O'_{i-1}$, ce qui assure que les O'_i sont croissants. On vérifie par récurrence que $O'_i \cap A = O_i$, grâce fait que les O_i croissent. Donc, les O'_i stationnent et il en est de même pour les O_i : A est noethérien.

(d)

Supposons que X possède un point y non ouvert.

Soit alors $x_0 \in X$, différent de y. On peut trouver, grâce à la propriété de séparation deux ouverts U_0 et V_0, l'un contenant x_0 et l'autre contenant y et qui sont disjoints. On pose $O_0 = U_0$ et $O'_0 = V_0$. Comme $\{y\}$ n'est pas ouvert, V contient un point différent de y ; appelons-le x_1. On fait pour x_1 comme pour x_0, on pose $O_1 = O_0 \cup U_1$ qui est strictement plus grand. En posant $O'_1 = O'_0 \cap V_1$, on a que $O'_1 \cap O_1 = \varnothing$. On recommence et on trouve une suite strictement croissante d'ouverts.

Donc tous les points sont ouverts. On voit alors nécessairement que l'espace X est forcément fini car noethérien et qu'il est discret.