Liens entre la flèche $X \to Y$ et la flèche $f_Y^{\#} : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$

Colas Bardavid

jeudi 12 mai 2005

Résultats

Lemme 1 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux espaces annelés. Soit* $\mathcal{B}$ *une base d'ouverts de* Y*. On suppose que pour tout* $B \in \mathcal{B}, f_B^{\#} : \mathcal{O}_Y(B) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(B))$ *est injective. Alors,* $f^{\#}$ *est injective.*

Proposition 2 *Soit* $\varphi : A \to B$ *un morphisme d'anneau injectif. Alors, le morphisme* $f : \mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ A$ *associé est dominant, ce qui veut dire que* $f(\mathrm{Spec}\ B)$ *est dense dans* $\mathrm{Spec}\ A$*.*

Lemme 3 (Séparation des points dans un ouvert affine) *Soit* X *un schéma. Soient* $x, y \in X$*, suffisamment proches pour que* x *et* y *soient dans un ouvert affine* U*. Alors il existe* $f \in \mathcal{O}_X(U)$ *telle que* $f(x) = 0$ *et* $f(y) \neq 0$ *ou le contraire.*

Théorème 4 *Soit* $\varphi : A \to B$ *un morphisme d'anneaux surjectif. On note* $X = \mathrm{Spec}\ A$ *et* $Y = \mathrm{Spec}\ B$*. Soit* $f : Y \to X$ *le morphisme de schémas associé. Alors,* f *est un homéomorphisme de* Y *vers un fermé de* X*.*

Questions en suspens et travail à faire

Travail à faire 5 *Faire le lien entre la séparation des points et le caractère séparé d'un schéma.*

Question 6 *Comment interprêter un morphisme de schémas* $f : X \to Y$ *tel que le morphisme sur les espaces de fonctions associé,* $f^{\#}$ *soit bijectif, un isomorphisme.*

Ce texte est la résolution de l'exercice $II.2.18$ du Hartrshorne.

(a)

C'est très classique et déjà fait.

(b)

D'abord, on montre ce lemme :

Lemme 7 *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés. Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de Y. On suppose que pour tout $B \in \mathcal{B}, f^\#_B : \mathcal{O}_Y(B) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(B))$ est injective. Alors, $f^\#$ est injective.*

Démonstration : On sait qu'il suffit de montrer que pour tout ouvert $U \hookrightarrow Y$, $f^\#_U$ est injective. Soit donc $U \hookrightarrow Y$ un ouvert. Soit $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ telle que $f^\#_U(g) = 0$. Soient $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de la base qui recouvrent U. On sait alors que $(f^\#_U(g))|_{f^{-1}(B_i)} = f^\#_{B_i}(g|_{B_i}) = 0$. Mais, comme $f^\#_{B_i}$ est injective, c'est que $g|_{B_i}$ est nulle. On conclut grâce à la propriété de définition locale que g est nulle. ■

On est alors armé pour montrer :

Proposition 8 *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. On pose $X = \mathrm{Spec}\ A$ et $Y = \mathrm{Spec}\ B$. On en déduit un morphisme $(f, f^\#)$ entre les schémas Y et X.*

$$\varphi \text{ est injectif} \iff f^\# \text{ l'est.}$$

Démonstration : De droite à gauche, c'est clair car $\varphi = f^\#_X$.

De gauche à droite, on utilise le lemme : on va juste montrer que pour tout $g \in A$, $f^\#_{D(g)}$ est injective. Qu'est-ce que cette flèche ? C'est

$$f^\#_{D(g)} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X D(g) = A_g & \to & \mathcal{O}_Y\left(f^{-1}(D(g))\right) = \mathcal{O}_Y\left(D(\varphi(g))\right) = B_{\varphi(g)} \\ \frac{b}{g^n} & \mapsto & \frac{\varphi(b)}{\varphi(g)^n} \end{array}.$$

Est-ce qu'elle est injective ? Si $\frac{\varphi(b)}{\varphi(g)^n} = 0$, cela veut dire qu'il existe m entier tel que $\varphi(g)^m \varphi(b) = \varphi(g^m b) = 0$. Mais, comme φ est injective, $g^m b = 0$, c'est-à-dire que b est nulle dans A_g. Donc, c'est bon. ■

Continuons :

Proposition 9 *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneau injectif. Alors, le morphisme $f : \mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ A$ associé est dominant, ce qui veut dire que $f(\mathrm{Spec}\ B)$ est dense dans $\mathrm{Spec}\ A$.*

Démonstration : On note $Y = \text{Spec } B$ et $X = \text{Spec } A$.

Soit donc $F = V(I)$ un fermé contenant $f(Y)$. Soit alors $g \in I$. On a en particulier $f(Y) \subset V(g)$. Pour tout $x \in Y$, $g(f(x)) = 0$. Or, on sait que

$$f^x\left(g(f(x))\right) = \varphi(g)(x).$$

Donc : pour tout $x \in Y, \varphi(g)(x) = 0$. On sait alors que $\varphi(g)$ est nilpotent. Comme φ est injective, g est aussi nilpotent. Donc I est inclut dans l'idéal des nilpotents et $V(I) = X$, ce qu'on voulait. ∎

(c)

Dans le même cadre, on s'intéresse maintenant au cas où φ est surjective.

On énonce un lemme :

Lemme 10 (Séparation des points dans un ouvert affine) *Soit X un schéma. Soient $x, y \in X$, suffisamment proches pour que x et y soient dans un ouvert affine U. Alors il existe $f \in \mathcal{O}_X(U)$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) \neq 0$ ou le contraire.*

Remarque : Autrement dit, sur un ouvert affine, les fonctions régulières séparent les points.

Démonstration : C'est facile. On se place dans $U = \text{Spec } A$. Puisque $x, y \in U$ sont différents, on ne peut avoir à la fois $x \subset y$ et $y \subset x$. Si, par exemple $x \subsetneq y$, on peut trouver $f \in x$ et $f \notin y$, ce qui veut dire que $f(x) = 0$ et $f(y) \neq 0$. ∎

Théorème 11 *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux surjectif. On note $X = \text{Spec } A$ et $Y = \text{Spec } B$. Soit $f : Y \to X$ le morphisme de schémas associé. Alors, f est un homéomorphisme de Y vers un fermé de X.*

Démonstration : Pour commencer, on sait que f est continue.

Montrons d'abord que f est injective. Soient donc x, y deux points distincts de Y. Grâce au lemme, on trouve h telle que $h(x) = 0$ et $h(y) \neq 0$ (par exemple). Comme φ est surjective, soit $g \in A$ telle que $\varphi(g) = h$. Donc : $\varphi(g)(x) = f^x(g(f(x))) = h(x) = 0$. Donc $g(f(x)) = 0$. De le même facçon, $\varphi(g)(y) = f^y(g(f(y))) = h(y) \neq 0$ et donc $g(f(y)) \neq 0$. Donc, $f(x) \neq f(y)$. C'est-à-dire que f est injective.

Montrons maintenant que l'image d'un fermé par f est encore un fermé. Pour ce faire, on va faire un peu d'algèbre commutative.

Supposons que $\mathfrak{P} \in \text{Spec } A$ est un idéal premier tel que $\ker \varphi \subset \mathfrak{P}$. Alors, $\varphi(\mathfrak{P}) \in \text{Spec } B$ et $\varphi^{-1}\left(\varphi(\mathfrak{P})\right) = \mathfrak{P}$.

En effet, si $xy \in B$ sont tels que $xy \in \varphi(\mathfrak{P})$, cela veut dire qu'il existe $z \in \mathfrak{P}$ tel que $xy = \varphi(z)$. Cependant, φ est surjective, donc on peut écrire $x = \varphi(\tilde{x})$ et $y = \varphi(\tilde{y})$ et donc $\varphi(z) = \varphi(\tilde{x}\tilde{y})$. Donc $z - \tilde{x}\tilde{y} \in \ker \varphi \subset \mathfrak{P}$. Donc $\tilde{x}\tilde{y} \in \mathfrak{P}$, ce qui permet de conclure.

Ensuite, d'abord, on a toujours $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{P})) \supset \mathfrak{P}$. Soit donc $x \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{P}))$, ce qui veut dire que $\varphi(x) = \varphi(y)$ pour un y bien choisi dans $\mathcal{P}$. Donc, $x - y \in \ker\varphi \subset \mathfrak{P}$. Donc $x \in \mathfrak{P}$. D'où l'égalité.

On peut alors montrer que l'image d'un fermé est un fermé, ce qui montrera en particulier que $f(Y)$ est fermé. Soit donc $F = V(I)$ un fermé de Y, avec I un idéal de B. Montrons que

$$f(V(I)) = V(\varphi^{-1}(I)).$$

Soit $x \in f(V(I))$: x s'écrit $x = f(y)$ avec $y \in V(I)$. Soit alors $g \in \varphi^{-1}(I)$, c'est-à-dire que $\varphi(g) = h \in I$. On sait alors que $f^y(g(x)) = f^y(g(f(y))) = \varphi(g)(y) = h(y) = 0$. Par injectivité de φ^y, on a donc $g(x) = 0$ et donc $x \in V(\varphi^{-1}(I))$.

Réciproquement, soit $x \in V(\varphi^{-1}(I))$. En particulier, $x \in f(Y)$ car en particulier $x \in V(\ker\varphi)$, ce qui veut dire que $\ker\varphi \subset x$. On sait alors que dans ce cas, $\varphi(x)$ est premier que $x = \varphi^{-1}(\varphi(x))$: c'est bien que x est l'image d'un $y = \varphi(x)$. On écrit donc : $x = f(y)$ avec $y \in Y$. Est-ce que, par hasard, $y \in V(I)$? Soit donc $g \in I$, donné avec $g = \varphi(h)$, où $h \in \varphi^{-1}(I)$, par surjectivité de φ. $g(y) = \varphi(h)(y) = f^y(h(f(y))) = f^y(f(x)) = 0$. Donc, $y \in V(I)$ et donc $x \in f(V(I))$. ■

Pour pouvoir dire que dans ce cas f est une injection fermée, il reste à montrer que :

Proposition 12 *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux surjectif. On note $X = \mathrm{Spec}\ A$ et $Y = \mathrm{Spec}\ B$. Soit $f : Y \to X$ le morphisme de schémas associé. Alors, $f^{\#}$ est surjectif.*

Démonstration : On va montrer beaucoup plus fort : pour tout $g \in A$, $f^{\#}_{D(g)}$ est surjectif. On peut alors en déduire que sur les fibres, $f^{\#}$ est surjective.

Soit donc $g \in A$. Comme φ est surjective, soit $h \in A$ telle que $g = \varphi(h)$. On regarde :

$$f^{\#}_{D(g)} : \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(D(g)) = A_g & \to & \mathcal{O}_Y(f^{-1}(D(g))) = \mathcal{O}_Y(D(\varphi(g))) = B_{\varphi(g)} \\ \frac{b}{g^n} & \mapsto & \frac{\varphi(b)}{\varphi(g)^n} \end{array} .$$

qui est clairement surjective. ■