Anneaux, modules gradués et Proj

Colas Bardavid

vendredi 17 juin 2005

Table des matières

Résultats

Lemme 1 *Soit I un idéal homogène de A.*
Alors, I est premier si, et seulement si, pour tous $x, y \in A$ homogènes, $xy \in I$ implique que x ou y soit dans I.

Théorème 2 *Soient $\mathfrak{P}$ et $\mathcal{Q} \in \operatorname{Proj} A$ tels qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N_0, \mathfrak{P}_n = \mathfrak{Q}_n$. Alors, $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$.*

Proposition 3

$$\mathcal{N}il(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{P} \textit{ idéal homogène}}} \mathfrak{P}$$

Questions en suspens et travail à faire

Projet 4 *Trouver une définition plus esthétique d'un anneau gradué.*

1 Anneaux gradués

Le paradigme, c'est $A[X]$.

1.1 Objets

Définition 5 *Un anneau gradué, c'est un anneau A, qui admet une décomposition, en tant que groupe abélien, $A = \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} A_d$, telle que $A_d A_e \subseteq A_{d+e}$.*

En particulier, A_0 est un anneau.

Les A_d, en fait, sont plus que des groupes abéliens : ce sont des A_0-modules.

Si $x \in A$, on peut l'écrire d'une unique façon $x = \sum_{d \geq 0} x_d$, où la somme est à support fini et où, pour tout $d \geq 0$, $x_d \in A_d$.

On appelle x_d la partie homogène de degré d de x, et on la note x_d.

1.2 Éléments homogènes

On dit que $x \in A$ est un élément *homogène de degré* d si $x \in A_d$.

1.3 Morphismes

On construit la catégorie $\mathbf{Ann}_{\mathbf{grad}}$.

Soient $S, T \in \mathbf{Ann}_{\mathbf{grad}}$. Un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}_{\mathbf{grad}}}(S, T)$, c'est un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(S, T)$ tel que pour tout $d \in \mathbf{N}$, $\varphi(S_d) \subset T_d$.

On note φ_d la restriction de φ à S_d, qui est un morphisme de groupes abéliens entre S_d et T_d.

En particulier, $\varphi|_{S_0} : S_0 \to T_0$ est un morphisme d'anneau.

Proposition 6 *Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}_{\mathbf{grad}}}(S, T)$. Alors, $\varphi(x)_d = \varphi(x_d) = \varphi_d(x_d)$.*

Démonstration : On écrit : $\varphi(x) = \varphi(\sum_{d \geq 0} x_d) = \sum_{d \geq 0} \varphi(x_d)$. Or, pour tout d, $\varphi(x_d) \in T_d$. Par unicité de la décomposition dans $T = \bigoplus_{d \geq 0} T_d$, on en déduit que $\varphi(x)_d = \varphi(x_d)$. ■

2 A-modules gradués

Dans toute la suite, $A \in \mathbf{Ann}_{\mathbf{grad}}$.

2.1 Objets

Définition 7 *On dit que M est un A-module gradué si, d'une part, M est un A-module et si, d'autre part, M admet une décomposition $M = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} M_d$, en tant que groupe abélien, qui vérifie : $A_d M_e \subset M_{d+e}$.*

Les M_d, mieux que des groupes abéliens, sont des A_0-modules.

Par exemple, A est un A-module gradué.

On peut aussi définir les éléments homogènes de degré donné. On peut décomposer d'une unique façon tout élément $m \in M$ en $m = \sum_{d \in \mathbf{Z}} m_d$.

Proposition-Définition 8 *Soit $M \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod_{grad}}$. Soit M' un sous-module de M. Alors, M' hérite de la structure graduée de M, c'est-à-dire qu'on peut décomposer $M' = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} (M' \cap M_d)$, si, et seulement si,*

$$m \in M' \Rightarrow m_d \in M' \qquad \forall d \in \mathbf{Z}.$$

On dit alors que M' est un sous-module gradué de M.

Démonstration : On note $M'_d = M' \cap M_d$. On a bien $A_e M'_d$. Si on a $M' = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} M'_d$, alors, si $m \in M'$, on a bien $m_d \in M'$. Réciproquement, supposons que $m \in M' \Rightarrow m_d \in M'$. La somme $\bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} M'_d$ est toujours directe et on a toujours $\bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} M'_d \subset M'$. Si $m \in M'$ on peut l'écrire $m = \sum_{d \in \mathbf{Z}} m_d$ et les m_d sont dans M'_d. Donc, c'est bon. ■

Définition 9 *Les sous-A-modules gradués de A sont appelés les idéaux gradués (ou homogènes) de A.*

Proposition 10 *Soit $M \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod_{grad}}$. Soit M' un sous-A-module de M. Alors, M' est gradué si, et seulement si, M' est engendre, en tant que A-module par des éléments homogènes.*

Démonstration : Supposons pour commencer que M' est gradué. Alors, M' est engendré par la famille $(m)_{m \in M'}$. Mais, mieux, M est engendré par $(m_d)_{m \in M'}$ et $_{d \in \mathbf{Z}}$ car $m = \sum_{d \in \mathbf{Z}} m_d$.

Réciproquement, si M' est engendré par la famille $(m_i)_{i \in I}$ d'éléments homogènes (de degré $n(i)$), alors, si $m \in M$, on peut écrire $m = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_{i_j}$, où les $\lambda_j \in A$. Quelle est alors la partie homogène de degré M de m ? On écrit $\lambda_j = \sum_{d \geq 0} \lambda_d(j)$, où $\lambda_d(j) \in A_d$. On a donc : $m = \sum_{j,d} \lambda_d(j) m_{i_j}$. Or, le degré de $\lambda_d(j) m_{i_j}$ est $d + n(i_j)$. Donc, la partie homogène de degré M de m est $\sum_{j,d | d+n(i_j)=M} \lambda_d(j) m_{i_j}$, qui est bien engendré par les m_i et qui est donc dans M' ; ainsi, M' est gradué. ■

2.2 Morphismes

Un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod_{grad}}}(M, N)$, c'est $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M, N)$ tel que $\varphi(M_d) \subset N_d$.

On note $\varphi_d = \varphi|_{M_d} : M_d \to N_d$.

On a $\varphi_d \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A_0}-\mathbf{Mod}}(M_d, N_d)$.

Fait 11 *Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod_{grad}}}(M, N)$. Alors, $\varphi(m)_d = \varphi(m_d) = \varphi_d(m_d)$.*

2.3 Propriétés des morphismes

Attention, cela se transporte avec des pincette pour les idéaux homogènes, car généralement, les morphismes considérés ne sont pas des morphismes de A-modules.

Proposition 12 *Soit* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A-Mod_{grad}}}(M, N)$*. Alors,* $\ker \varphi$ *est un sous-A-module gradué de* M *et* $\mathrm{Im}\, \varphi$ *est un sous-A-module gradué de* N*.*

Démonstration : Si $\varphi(x) = 0$, alors, $\varphi(x)_d = 0 = \varphi(x_d)$.
Si $y = \varphi(x)$, alors $y_d = \varphi(x_d)$. ■

Proposition 13 *Soit* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A-Mod_{grad}}}(M, N)$*. Soit* N' *un sous-A-module gradué de* N*. Alors,* $\varphi^{-1}(N')$ *est un sous-A-module gradué de* M*.*

Démonstration : D'abord, c'est bien un sous-A-module. Ensuite, soit $m \in \varphi^{-1}(N')$: $\varphi(m) \in N'$. Donc, $\varphi(m)_d = \varphi(m_d) \in N'$. Donc, $m_d \in \varphi^{-1}(N')$. ■
On a un enoncé analogue pour les images.

2.4 Propriétés des sous-A-modules gradués

Toutes ces propriétés s'appliquent en particulier aux idéaux homogènes.

Fait 14 *Soient* $A \in \mathbf{Ann_{grad}}$ *et* $M \in \mathbf{A-Mod_{grad}}$*. Soient* $(M_i)_{i \in I}$ *une famille de sous-A-modules gradués de* M*.*
Alors, $\bigcap_{i \in I} M_i$ *est un sous-A-module gradué de* M*.*
Alors, $\sum_{i \in I} M_i$ *est un sous-A-module gradué de* M*.*

2.5 A-module engendré par une partie

Soit $M \in \mathbf{A-Mod_{grad}}$.
Soit E une partie de M.
Alors, il existe un plus petit A-module gradué contenant E. C'est le *A-module gradué engendré par E.*
Il est défini par

$$\bigcap_{\substack{M' \text{sous-}A\text{-module gradué de } M \\ E \subset M'}} M'.$$

Cela s'applique en particulier aux idéaux homogènes.

3 Idéaux gradués (ou homogènes)

Dans toute la suite, $A \in \mathbf{Ann_{grad}}$.

3.1 Produit d'idéaux homogènes

Proposition 15 *Soient I, J deux idéaux homogènes de A. Alors, IJ est homogène.*

Démonstration : Soit $x \in IJ$: x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, avec $a_i \in I$ et $b_i \in J$. On décompose $a_i = \sum_d {a_i}^d$ et $b_i = \sum_d {b_i}^d$. Les ${a_i}^d$ et les ${b_i}^d$ sont respectivement dans I et dans J. Alors, $x = \sum_{i,d,d'} {a_i}^d {b_i}^{d'}$. On voit sur cette écriture que la partie homogène de degré d de x est alors bien dans IJ. ■

3.2 Racine d'un idéal homogène

Proposition 16 *Si I est un idéal homogène de A, il en est de même pour $\sqrt{I}$.*

Démonstration : Soit $x \in \sqrt{I}$. Donc, il existe $N \geq 1$ tel que $x\sqrt{N} \in I$. On se demande si la partie homogène de x est dans $\sqrt{I}$.

On écrit $x = \sum_d x_d$. Pour M entier, on a donc $x^M = \sum_{d_1,\ldots,d_M \geq 0} x_{d_1} \cdots x_{d_M}$.

Supposons qu'une des parties homogènes, x_d, de x ne soit pas dans $\sqrt{I}$. On choisit celle de plus petit degré, qu'on note x_{d_0}. On a donc :

$$x = \underbrace{x_0 + x_1 + \cdots x_{d_0-1}}_{\in\sqrt{I}} + x_{d_0} + \cdots$$

On s'intéresse alors à $\tilde{x} = x - (x_0 + x_1 + \cdots x_{d_0-1})$, qui est encore dans $\sqrt{I}$.

Donc, il existe $M \geq 1$ tel que $\tilde{x}^M = \sum_{d_1,\ldots,d_M \geq d_0} x_{d_1} \cdots x_{d_M} \in I$.

La partie homogène de plus petit degré de $\tilde{x}^M$, c'est ${x_{d_0}}^M$, qui est donc dans I. Donc, $x_{d_0} \in \sqrt{I}$, ce qui est absurde. ■

3.3 Idéaux homogènes et morphismes d'anneaux gradués

Voilà ce qu'on peut dire. Rappelons qu'en général, l'image d'un idéal n'est pas un idéal.

Proposition 17 *Soient $A, B \in \mathbf{Ann_{grad}}$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann_{grad}}}(A, B)$. Soit I un idéal homogène de B. Alors, $\varphi^{-1}(I)$ est un idéal homogène de A.*

Démonstration : Déjà, on sait que $\varphi^{-1}(I)$ est un idéal. Soit alors $x \in \varphi^{-1}(I)$. On a $\varphi(x)_d = \varphi(x_d) \in I$, car I est homogène. Donc $x_d \in \varphi^{-1}(I)$ et donc $\varphi^{-1}(I)$ est bien homogène. ■

Proposition 18 *Soient $A, B \in \mathbf{Ann_{grad}}$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann_{grad}}}(A, B)$ surjectif. Soit I un idéal homogène de A. Alors, $\varphi(I)$ est un idéal homogène de B.*

Démonstration : Vérifions que c'est bien un idéal. D'abord, on sait que c'est un groupe abélien. Ensuite, si $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $\varphi(a) = b$. Ainsi, si $y \in \varphi(I)$, c'est-à-dire si $y = \varphi(x)$, $by = \varphi(ax)$ et donc, c'est ok.

Soit donc $y = \varphi(x) \in \varphi(I)$. On a $y_d = \varphi(x)_d = \varphi(x_d) \in \varphi(I)$. C'est bon. ■

4 Idéaux premiers homogènes

Dans toute la suite, $A \in \mathbf{Ann_{grad}}$.

4.1 Première propriété

Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier homogène de A, alors $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap A_0$ est un idéal premier de A_0.

En effet, c'est l'image réciproque par $A_0 \xrightarrow{i} A$ de $\mathfrak{P}$.

4.2 Une super caractérisation des idéaux homogènes premiers

Lemme 19 *Soit I un idéal homogène de A.*
Alors, I est premier si, et seulement si, pour tous $x, y \in A$ homogènes, $xy \in I$ implique que x ou y soit dans I.

Démonstration : Dans un sens, c'est évident.

Dans l'autre, supposons que la propriété fondamentale des idéaux premiers soit vérifiée, pour I, pour les éléments homogènes. Soient alors $x, y \in A$ tels que $xy \in I$. On écrit $x = x_{d_0} + x_{d_0+1} + \cdots$ et $y = y_{d_1} + y_{d_0+1} + \cdots$ (avec $x_{d_0}, ty_{d_1} \neq 0$).

Supposons que ni x ni y ne soient dans I. Nécessairement une de leurs parties homogèènes n'est pas dans I. On note $x_{d'_0}$ et $y_{d'_1}$ les parties homogènes de plus petit degré de x et de y qui ne sont pas dans I.

On écrit

$$x = \underbrace{x_{d_0} + x_{d_0+1} + \cdots + x_{d'_0-1}}_{=x_I \in I} + x_{d'_0} + \cdots$$

et pareil pour y.

On a que $(x - x_I)(y - y_I) = xy - x_I(y - y_I) - y_I x \in I$.

La partie homogène de plus petit degré de $(x - x_I)(y - y_I)$, c'est $x_{d'_0} y_{d'_1}$, qui est dans I, puisque I est homogène. Donc, $x_{d'_0}$ ou $y_{d'_1}$ est dans I, ce qui est absurde. ■

4.3 Lemme de Zorn et existence d'idéaux premiers homogènes.

On adapte le théorème de Krull au cas des idéaux homogènes.

Proposition 20 *Soit $S \subset A$ une partie multiplicative non-vide de A, ne contenant par* 0. *Alors, $\{I$ idéal homogène $\mid I \cap S = \varnothing\}$ admet un élément maximal, qui est un idéal premier homogène.*

Démonstration : D'abord, on montre l'ensemble considéré est non-vide et ordonné inductif. Il est non-vide car il contient l'idéal nul, (0).

Il est ordonné inductif car si $\{I_i\}_{i\in I}$ est un ensemble d'idéaux homogènes n'intersectant par S et totalement ordonné (pour l'inclusion), alors $I = \bigcup_{i\in I} I_i$ est un idéal (c'est classique) n'intersectant pas S (c'est facile). Mieux, cet idéal homogène car si $x \in I$, x est dans un des I_i et donc toutes ses parties homogènes aussi.

Le lemme de Zorn nous dit donc que cet ensemble admet un élément maximal (pour l'inclusion). Soit $\mathcal{P}$ un tel élément. Déjà, on sait que c'est un idéal homogène n'intersectant pas S. Montrons qu'il est premier.

Supposons qu'on ait trouvé $x, y \in A$ et homogènes (grâce au lemme) tels que $x, y \notin \mathfrak{P}$ et $xy \in \mathcal{P}$. D'après la propriété de maximalité, (I, x) et (I, y), qui sont des idéaux homogènes (car engendrés par des éléments homogènes), intersectent S. On peut donc écrire $s_1 = x_I + ax$ et $s_2 = x'_I + by$. On multiplie ces deux écritures : $s_1 s_2 = x_I(x'_I + by) + x'_I ax + abxy$. Problème : à gauche, c'est dans S et à droite c'est dans I. C'est absurde d'où le résultat (I n'est pas l'idéal plein car $S \neq \varnothing$). ■

Supposant que A soit non-nul. Alors, en prenant la partie multiplicative $S = \{1\}$, on voit qu'il existe toujours un idéal premier homogène dans A.

Une autre conséquence :

Proposition 21

$$\mathcal{N}il(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{P}\in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{P} \textit{ idéal homogène}}} \mathfrak{P}$$

Démonstration : D'abord, on a toujours $\mathcal{N}il(A) \subset \mathfrak{P}$, pour tout idéal $\mathfrak{P}$ premier. Si $x \in A$ n'est pas nilpotent, on peut trouver, d'après la proposition précédente, $\mathfrak{P}$, idéal premier homogène ne contenant pas x. ■

Plus généralement, on peut énoncer la

Proposition 22 *Soit I un idéal homogène de A. Alors,*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{I\subset\mathfrak{P}\in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{P} \textit{ idéal homogène}}} \mathfrak{P}$$

Démonstration : D'abord, si $I \subset \mathfrak{P}$ et que $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A$, on a $\sqrt{I} \subset \mathfrak{P}$; si $x^N \in I$, $x^n \in \mathfrak{P}$ et donc $x \in \mathfrak{P}$.

Ensuite, si $x \notin \sqrt{I}$ alors $S = \{x^n, n \in \mathbf{N}^*\}$ n'intersecte pas I. Donc, en adaptant légèrement la preuve de la proposition 20, on peut prouver qu'il existe $\mathfrak{P}$ idéal premier homogène contenant I et n'intersectant pas S. Donc x n'est pas dans l'intersection. ■

4.4 Étude de $\operatorname{Proj} A$

Soit $A \in \mathbf{Ann_{grad}}$.

On note $A_+ = \bigoplus_{d>0} A_d$.

On note $\operatorname{Proj} A = \{\mathfrak{P} \text{ premiers homogènes } \mid A_+ \not\subset \mathfrak{P}\}$.

C'est un objet de la théorie des schémas.

Proposition 23 *Soit* $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} A$. *Alors,* $\forall N_0 \in \mathbf{N}$, $\exists n \geq N_0 \mid \mathfrak{P}_n \subsetneq A_n$.

Autrement dit :

Principe 24 $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} A$ *ne peut pas être toujours plein à partir d'un certain rang.*

Démonstration : En effet, comme $A_+ \not\subset \mathfrak{P}$, on peut trouver $x \in A_+$ qui n'est pas dans $\mathfrak{P}$. Mieux, on peut trouver $y \in A_+$, homogène de degré d strictement positif, qui n'est pas dans $\mathfrak{P}$.

Fixons $N_0 \in \mathbf{N}$. Alors, y^n est de degré nd et donc de degré plus grand que N_0 pour n suffisamment grand. Cependant, ce n'est pas possible que y^n soit dans $\mathfrak{P}$, car $\mathfrak{P}$ est premier. ■

Dans le même style :

Théorème 25 *Soient* $\mathfrak{P}$ *et* $\mathcal{Q} \in \operatorname{Proj} A$ *tels qu'il existe* $N_0 \in \mathbf{N}$ *tel que* $\forall n \geq N_0, \mathfrak{P}_n = \mathfrak{Q}_n$. *Alors,* $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$.

Autrement dit,

Principe 26 $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} A$ *est déterminé par sa trace au voisinage de l'infini.*

Démonstration : On va montrer que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$. Soit $x \notin \mathfrak{Q}$. Montrons que $x \notin \mathfrak{P}$. Comme $A_+ \not\subset \mathfrak{Q}$, soit $y \in A_+$, qu'on choisit homogène (de degré strictement positif), tel que $y \notin \mathfrak{Q}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y^n \notin \mathfrak{Q}$. Comme $\mathfrak{Q}$ est premier, on a mieux : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $xy^n \notin \mathfrak{Q}$.

Pour n suffisamment grand, xy^n vit dans $\bigoplus_{d \geq N_o} A_d$. Donc, on ne peut pas avoir $xy^n \in \mathfrak{P}$. Donc, x n'est pas dans $\mathfrak{P}$. ■