Mettons les mains dans le cambouis pour étudier un isomorphisme de schémas

Colas Bardavid

vendredi 29 avril 2005

Table des matières

Résultats

Théorème 0.1 (Formule du morphisme de schémas) *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux schémas et* $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un morphisme. Soit* f *une fonction globale sur* Y*. Alors, pour tout* $x \in X$, $Eval_x(\Phi_Y(f)) = \Phi^x\left(Eval_{\varphi(x)}(f)\right)$.
Écrit autrement :

$$\forall f \in \mathcal{O}_Y(Y), \forall x \in X, \Phi_Y(f)(x) = \Phi^x(f(\varphi(x)).$$

Proposition 0.2 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux schémas et* $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un morphisme. Soit* f *une fonction globale sur* Y*. Alors :*

$$\varphi^{-1}(D(f)) = D\left(\Phi_Y(f)\right).$$

Fait 0.3 *Soit* $(X, \mathcal{O}_X(X)$ *un schéma et* U *un ouvert de* X*. Alors :*

$$D(f) \cap U = D(f\mid_U).$$

L'idée de ce texte, c'est de vérifier que la théorie des schémas fonctionne bien. On va vérifier qu'un schéma affine ressemble effectivement à un Spec A. Autrement dit, on va vérifier que la notion d'isomorphisme de schémas est bonne.

1 Un ismorphisme de schéma induit un isomorphisme entres les anneaux des fonctions globales

Fait 1.1 *Soit $S = (X, \mathcal{O}_X)$ un schéma. Supposons que S soit isomorphe à* Spec A *; alors $\mathcal{O}_X(X)$ est isomorphe en tant qu'anneau à A*

Démonstration : C'est évident. On note $S \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} S' = \operatorname{Spec} A$ un isomorphisme et $S \xrightarrow{(\psi,\Psi)} S$ l'isomorphisme réciproque. On a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A = \mathcal{O}_{S'}(S') \arrow[r, "\Phi_{S'}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_A"'] & \mathcal{O}_S\left(\varphi^{-1}(S')\right) = \mathcal{O}_S(S) \arrow[r, "\Psi_S"] & \mathcal{O}_{S'}\left(\psi^{-1}(S)\right) = \mathcal{O}_{S'}(S') = A
\end{tikzcd}$$

et il donne un isomorphisme entre A et $\mathcal{O}_X(X)$. ■
Remarque : Le résultat est encore vrai et la démonstration strictement identique si S', au lieu d'être un Spec A est un schéma quelconque.

2 Valeur d'une fonction en un point

Soit $(X, \mathcal{O}_X(X))$ un schéma, $U \underset{\ominus}{\hookrightarrow} X$ et $f \in \mathcal{O}_X(U)$ une fonction. Soit $x \in U$. Donnons un sens à $f(x)$.

Par définition de $\mathcal{O}_{X,x}$ comme limite inductive des $(\mathcal{O}_X(U))_{U \in \mathcal{V}^\circ(x)}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
U & \mathcal{O}_X(U) \arrow[dd, "\rho_{U\to V}"'] \arrow[dr, "\mathcal{G}_x"] & & \\
& & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x = \kappa(x) \\
V \arrow[uu, hook] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[ur, "\mathcal{G}_x"'] & &
\end{tikzcd}$$

On appelle $f(x)$ l'une quelconque des image de $f \in \mathcal{O}_X(U)$ dans $\kappa(x)$. Il est clair que $f(x)$ ne dépend que de $\mathcal{G}_x f$.

3 Ouverts distingués

Notation 3.1 *Soit* $S = (X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma et* $f \in \mathcal{O}_X(X)$*. On note* $V(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ *et* $D(f) = X \setminus V(f)$*.*

Proposition 3.2 $D(f)$ *est ouvert : on appelle les ouverts de ce type les ouverts élémentaires.*

Lemme 3.3 (Cas des schémas affines) *Soit* $S = (X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma affine et* $f \in \mathcal{O}_X(X)$*. Alors,* $D(f)$ *est un ouvert de* X*.*

Démonstration : (du lemme)

Notons $S \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} T = \text{Spec } A$ un isomorphisme d'inverse (ψ, Ψ).

Soit $\psi(x) \in X$.

On sait que le morphisme induit par ψ sur les anneaux de germes est tel que le digramme suivant commute pour tout ouvert U de X contenant $\psi(x)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\Psi_U"] \arrow[d, "\mathcal{G}_{\psi(x)}"'] & \mathcal{O}_T(\psi^{-1}(U)) \arrow[d, "\mathcal{G}_x"'] \\
\mathcal{O}_{X,\psi(x)} \arrow[r, "\Psi_x"] & \mathcal{O}_{T,x}
\end{tikzcd}$$

On utilise alors le fait que (φ, Φ) est plus qu'un morphisme d'espaces annelés : c'est un morphisme d'espaces localement annelés. Cela signifie que $(\Psi_x)^{-1}(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_{\psi(x)}$. Plus clairement, cela signifie que

$$\text{Ker} \left(\mathcal{O}_{X,\psi(x)} \xrightarrow{\Psi_x} \mathcal{O}_{T,x} \xrightarrow{\text{Eval}_x} \mathcal{O}_{T,x}/\mathfrak{M}_x = \kappa(x) \right) = \mathfrak{M}_{\psi(x)}$$

et donc que ce morphisme se factorise en

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,\psi(x)} \arrow[rr, "\Psi_x"] \arrow[d, "\text{Eval}_{\psi(x)}"'] & & \mathcal{O}_{T,x} \arrow[r, "\text{Eval}_x"] & \kappa(x) = \mathcal{O}_{T,x}/\mathfrak{M}_x \\
\mathcal{O}_{X,\psi(x)}/\mathfrak{M}_{\psi(x)} = \kappa(\psi(x)) \arrow[rrru, "\Psi^x"] & & &
\end{tikzcd}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\Psi_U"] \arrow[d, "\mathcal{G}_{\psi(x)}"'] & \mathcal{O}_T(\psi^{-1}(U)) \arrow[d, "\mathcal{G}_x"'] \\
\mathcal{O}_{X,\psi(x)} \arrow[r, "\Psi_x"] \arrow[d, "\text{Eval}_{\psi(x)}"] & \mathcal{O}_{T,x} \arrow[d, "\text{Eval}_x"] \\
\kappa(\psi(x)) \arrow[r, "\Psi^x"] & \kappa(x)
\end{tikzcd}$$

Ensuite, on peut $A_n^k + E \xrightarrow{\varepsilon} \bar{\mathcal{B}}$ faire la même chose pour (φ, Φ) ; en juxtaposant les deux diagrammes commutatifs obtenus, on trouve :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\Psi_U"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_X(U)}"] \arrow[d, "\mathcal{G}_{\psi(x)}"] & \mathcal{O}_T(\psi^{-1}(U)) \arrow[r, "\Phi_{\psi^{-1}(U)}"'] \arrow[d, "\mathcal{G}_x"] & \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}\left(\psi^{-1}(U)\right)\right) = \mathcal{O}_X(U) \arrow[d, "\mathcal{G}_{\psi(x)}"] \\
\mathcal{O}_{X,\psi(x)} \arrow[r, "\Psi_x"'] \arrow[d, "\mathrm{Eval}_{\psi(x)}"] & \mathcal{O}_{T,x} \arrow[r, "\Phi_{\psi(x)}"'] \arrow[d, "\mathrm{Eval}_x"] & \mathcal{O}_{X,\varphi^{-1}(x)} = \mathcal{O}_{X,\psi(x)} \arrow[d, "\mathrm{Eval}_{\psi(x)}"] \\
\kappa(\psi(x)) \arrow[r, "\Psi^x"'] & \kappa(x) \arrow[r, "\Phi^{\psi(x)}"'] & \kappa(\varphi^{-1}(x) = \psi(x))
\end{tikzcd}
$$

On a pu rajouter la flèche Id en haut car ψ et φ sont inverses l'une de l'autre. De cette Id, on déduit que les autres lignes du diagramme sont aussi des Id.

En effet, notons tout d'abord que ce diagramme est valable pour tout ouvert U de X contenant $\psi(x)$. En particulier, si h est un germe dans $\mathcal{O}_{X,\psi(x)}$, on peut trouver un certain ouvert U de X et $g \in \mathcal{O}_X(U)$ telle que h provienne de g. Dès lors, il suffit de balader g dans le diagramme pour voir que $\Phi_{\psi(x)} \circ \Psi_x(h) = h$.

Pour les corps résiduels, le raisonnement est le même, sans qu'on ait besoin d'utiliser la validité du diagramme pour tout U voisinage ouvert de $\psi(x)$.

Les rôles de S et T étant interchangeables, on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \operatorname{Spec} A, (\Psi_x)^{-1} &= \Phi_{\psi(x)} \\
\forall x \in \operatorname{Spec} A, (\Psi^x)^{-1} &= \Phi^{\psi(x)}
\end{aligned}
$$

Muni de tous ces outils, on peut démontrer la formule fondamentale pour comprendre les morphismes de schémas. Il suffit d'écrire le demi-diagramme gauche précédent pour $U = X$.

Théorème 3.4 (Formule du morphisme de schémas) *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux schémas et* $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un morphisme. Soit* f *une fonction globale sur* Y*. Alors, pour tout* $x \in X$, $Eval_x(\Phi_Y(f)) = \Phi^x\left(Eval_{\varphi(x)}(f)\right)$. *Écrit autrement :*

$$\forall f \in \mathcal{O}_Y(Y), \forall x \in X, \; \Phi_Y(f)(x) = \Phi^x(f(\varphi(x))).$$

On a démontré au passage une jolie formule mais continuons notre chemin pour comprendre $D(f)$.

On peut déjà énoncer une proposition bien sympathique :

Proposition 3.5 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux schémas et* $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un morphisme. Soit* f *une fonction globale sur* Y*. Alors :*

$$\varphi^{-1}(D(f)) = D\left(\Phi_Y(f)\right).$$

Démonstration : (de la proposition)

Pour démontrer cette proposition, on utilise le théorème 3.4 :

$$\begin{aligned} x \in D(\Phi_Y(f) &\iff \Phi_Y(f)(x) = 0 \iff \Phi^x(f(\varphi(x))) = 0 \\ &\iff f(\varphi(x)) = 0 \\ &\iff \varphi(x) \in D(f) \\ &\iff x \in \varphi^{-1}(D(f)) \end{aligned}$$

■

Revenons à la démonstration du lemme. Avec cette proposition dans notre mallette à outils, c'est facile. Il suffit de rappeler les notations. On a noté $S \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} T = \text{Spec } A$ un isomorphisme d'inverse (ψ, Ψ). Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Soit $\tilde{f} \in A$ telle que $\Phi_T(\tilde{f}) = f$. En appliquant la formule de la proposition précédente, on a que $\varphi^{-1}(D(\tilde{f})) = D(\Phi_T(\tilde{f}) = D(f)$.

Comme φ est continue, il nous suffit de montrer que si $h \in A$, $D(h)$ est ouvert ; de façon équivalente, de montrer que $V(h)$ est fermé. Caractérisons les points de $V(h)$. $x \in \text{Spec } A$ est dans $V(h)$ si $\mathcal{G}_x h$ est dans $\mathcal{M}_x$. Cela signifie que $\frac{h}{1} \in \mathcal{P}_x A_{\mathfrak{P}_x}$, où on a noté $\mathfrak{P}_x$ l'idéal premier de A qui correspond à x. Donc, on a $\frac{h}{1} = \frac{p}{g}$. Donc, il existe $k \notin \mathfrak{P}_x \mid k(hg - p) = 0$. Comme $\mathfrak{P}_x$ est premier, nécassairement, $hg - p = 0$ et donc $fg \in \mathfrak{P}_x$. Comme $g \notin \mathfrak{P}_x$, c'est que h est dedans. Réciproquement, on a évidemment que $h \in \mathfrak{P}_x \Rightarrow h(x) = 0$. Donc : $V(h) = \{x \in \text{Spec } A \mid h \in \mathfrak{P}_x\} = \{x \in \text{Spec } A \mid (h) \subset \mathfrak{P}_x\}$, qui est par définition un fermé de Spec A.

Ceci achève la démonstration : si S est affine, les $D(f)$ sont ouverts.■

Démonstration : (de la proposition 3.2)

Soit U un ouvert affine de X. Montrons que $D(f) \cap U$ est ouvert. Tout simplement, on se place sur le sous-schéma ouvert $S\mid_U$, dont les fonctions globales sont les éléments de $\mathcal{O}_X(U)$. Soit $x \in U$. On a $f(x) = 0 \iff \text{Eval}_x(\mathcal{G}_x f) = 0 \iff \text{Eval}_x(\mathcal{G}_x(f\mid_U)) = 0 \iff f\mid_U(x) = 0$. Ainsi, $D(f) \cap U = D(f\mid_U)$. D'après le lemme 3.3, on a donc que $D(f) \cap U$ est ouvert. Comme X peut être recouvert par des ouverts affines, $D(f) = D(f) \cap X = D(f) \cap \bigcup_{U \text{affine}} U = \bigcup_{U \text{affine}} (U \cap D(f))$. En tant que réunion d'ouverts, $D(f)$ est donc ouvert. ■

Au passage, on a démontré :

Fait 3.6 *Soit $(X, \mathcal{O}_X(X)$ un schéma et U un ouvert de X. Alors :*

$$D(f) \cap U = D(f\mid_U).$$