Composantes irréductibles

Colas Bardavid

samedi 9 juillet 2005

Table des matières

Résultats

Lemme 1 *L'adhérence d'une partie irréductible l'est encore.*

Lemme 2 *Soit X un espace topologique. Soit Y une partie de X. Alors, Y est irréductible si, et seulement si, son adhérence l'est.*

Corollaire 3 *La notion de composante irréductible est équivalente à la notion de partie irréductible maximale.*

Théorème 4 *Un espace topologique est recouvert par ses composantes irréductibles. Plus précisément : si $Y \subset X$ est irréductible, alors Y est contenu dans une composante irréductible.*

Proposition 5 *Un schéma noethérien est un espace topologique noethérien et a donc un nombre fini de composantes irréductibles.*

Lemme 6 *Soit X un espace topologique dont on note C_i les composantes irréductibles. Soit U un ouvert (non-vide) de X. Alors, les $C_i \cap U$ non-vides sont des composantes irréductibles de U.*

Proposition 7 *Soit X un schéma localement noethérien. Alors, par tout point, il ne passe qu'un nombre fini de composantes irréductibles.*

Questions en suspens et travail à faire

Ce texte est la rédaction de ce que m'a raconté Amaury Thuillier un après-midi où on a discuté ensemble de normalition et de Grothendieck.

On rappelle qu'un espace topologique est dit *irréductible* s'il ne peut être décomposé en l'union de deux fermé non-pleins. Cette notion est surtout à l'œuvre en géométrie algébrique avec la topologie de Zarisiki. D'un certain point de vue, elle permet de comprendre le concept de topologie dans une optique combinatoire.

1 Composantes irréductibles

Soit X un espace topologique. On dit que $F \subset X$ est une composante irréductible de X si F est fermé, irréductible et maximal pour cette propriété.

Avant de parler des composantes irréductibles, prouvons le

Lemme 8 *Soit X un espace topologique. Soit $x \in X$. Alors, $\overline{\{x\}}$ est un fermé irréductible.*

Démonstration : C'est facile. Soit F un fermé contenu dans $\overline{\{x\}}$. Si F contient x, alors F est plein. ■

Un autre lemme qui nous servira :

Lemme 9 *L'adhérence d'une partie irréductible l'est encore.*

Démonstration : Soit X un espace topologique et soit Y une partie de X qui est irréductible. Soient F et F' deux fermés de $\overline{Y}$ tels que $\overline{Y} = F \cup F'$. F et F' sont en particulier des fermés de X. Donc, $Y \cap F$ et $Y \cap F'$ sont des fermés de Y et on a $Y = (Y \cap F) \cup (Y \cap F')$. Par irréductibilité, on a par exemple $Y \cap F = Y$, ce qui veut dire que $Y \subset F$. Par conséquent, $\overline{Y} \subset F$ et on a donc en fait égalité. ■

Corollaire 10 *La notion de composante irréductible est équivalente à la notion de partie irréductible maximale.*

On peut maintenant énoncer :

Théorème 11 *Un espace topologique est recouvert par ses composantes irréductibles. Plus précisément : si $Y \subset X$ est irréductible, alors Y est contenu dans une composante irréductible.*

Démonstration : On utilise le lemme de Zorn, évidemment. Soit $Y \subset X$ un sous-espace de X qui, muni de la topologie induite, est irréductible. On considère alors l'ensemble E des sous-espaces de X irréductibles et qui contiennent Y. Cet ensemble est non-vide car il contient Y.

Montrons que E est ordonné inductif (pour l'inclusion). Soient donc $(X_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de parties irréductibles de X contenant toutes Y. Alors, l'union des X_i contient encore Y et est irréductible. En effet, soient F et F' deux fermés de $\bigcup_{i \in I} X_i$ dont l'union est pleine. Alors (par transitivité de l'induction des topologies), pour tout $i \in I$, $F^{(')} \cap X_i$ est un fermé de X_i et on a $(F' \cap X_i) \cup (F \cap X_i) = X_i$. Par irréductibilité de X_i, on a par exemple $F \cap X_i = X_i$, ce qui veut dire que $X_i \subset F$. Supposons alors qu'on n'ait ni $Y = \bigcup_{i \in I} X_i$ ni $Y' = \bigcup_{i \in I} X_i$. Ainsi, il existe $x_0 \in X_{i_0}$ qui n'est pas dans Y et $x_1 \in X_{i_1}$ qui n'est pas dans Y'. Disons par exemple qu'on a $X_{i_0} \subset X_{i_1}$. Comme x_1 n'est pas dans Y' on ne peut pas avoir $Y' \cap X_{i_1} = X_{i_1}$: on a donc $X_{i_1} \subset Y$. En particulier, on a $X_{i_0} \subset Y$ et donc $x_{i_0} \in Y$, ce qui est absurde.

Grâce au lemme de Zorn, on sait alors que E possède un élément maximal. Grâce au lemme 8 on sait même que cet élément maximal est fermé : c'est une composante irréductible contenant Y.

Soit maintenant $x \in X$. D'après le lemme 7, $\overline{\{x\}}$ est irréductible et donc est contenu dans une composante irrédutible. ■

En fait, on peut raffiner le lemme 8 en :

Lemme 12 *Soit X un espace topologique. Soit Y une partie de X. Alors, Y est irréductible si, et seulement si, son adhérence l'est.*

Démonstration : On a déjà démontré un sens.

Dans l'autre, supposons que $\overline{Y}$ soit irréductible et soient F et F' deux fermés de X tels que $(F \cap Y) \cup (F' \cap Y) = Y$. C'est-à-dire, $Y \cap (F \cup F') = Y$: Y est contenu dans le fermé $F \cup F'$ donc $\overline{Y}$ aussi donc par exemple $\overline{Y} = F$ et donc $Y = Y \cap F$.■

2 Ouverts denses et composantes irréductibles

J'ai le souvenir qu'Amaury m'avait dit qu'un ouvert est dense si, et seulement si, il rencontre toutes les parties irréductiblles. Il semble que ce soit faux.

Ici, on démontre :

Proposition 13 *Soit X un espace topologique et soit $U \overset{\circ}{\hookrightarrow} X$ un ouvert de X. Alors, si U intersecte toutes les composantes irréductibles de X, U est dense dans X.*

Avant, on rappelle le

Lemme 14 *Soit X un espace topologique irréductible. Soit U un ouvert non-vide de X. Alors, U est dense dans X et est irréductible pour la topologie induite.*

qui est démontré dans *Propriétés schématiques globales qu'on peut localiser*.

Notons que la réciproque (de la proposition) est fausse, comme le montre le :

Contre-exemple 15 *On se place sur la droite $\mathbf{R}$. Les seuls irréductibles sont les singletons. Par conséquent, les composantes irréductibles de $\mathbf{R}$ sont les $\{x\}$, $x \in \mathbf{R}$. $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ est ouvert et dense mais ne rencontre pas toutes les composantes irréductibles de $\mathbf{R}$.*

Démonstration : (de la proposition)

Soit U un ouvert de X qui intersecte toutes les composantes irréductibles. Montrons qu'il est dense. Soit V un ouvert de X. Alors, V rencontre une composante irréductible C. $V \cap C$ est un ouvert non-vide de C et $U \cap C$ aussi : or tous les ouverts non-vides d'un espace irréductible y sont denses. Donc, $U \cap V \cap C \neq \varnothing$. ■

3 Schémas (localement) noethériens et composantes irréductibles

Dans cette partie, où on s'intéresse aux schémas, on veut relier finitude (locale) des composantes irréductibles et noethériennité.

3.1 Il n'y a pas de lien bi-univoque entre finitude des composantes irréductibles et noethériennité

On commence donc cette partie par une déception.

Contre-exemple 16 *Le schéma* $\operatorname{Spec} \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ *n'est pas noethérien mais n'a qu'une composante irréductible.*

Pour démontrer ce fait, souvenons-nous de (démontré dans *Propriétés schématiques qui se testent globalement*) :

Théorème 17 *Un schéma affine est noethérien si, et seulement si, son anneau des fonctions globales est noethérien.*

Démonstration : $S = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ n'est pas noethérien car l'anneau $A = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ ne l'est pas.

Montrons maintenant que S est irréductible. Soient F et F' deux fermés qui recouvrent S. On écrit $F = V(I)$ et $F' = V(I')$. Supposons que F et F' ne soient pas pleins et donc que I et I' ne sont pas nuls (A est intègre). On dispose donc de f et f' non-nuls respectivement dans I et I'. f et f' ne font intervenir qu'un nombre fini d'indices, disons qu'ils sont tous les deux dans $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_N]$.

Or (en raisonnant dans $\mathbf{C}[\cdots][X_{N+1}]$), l'idéal (X_{N+1}) est premier et donc, par exemple, il contient I. En particulier, $f \in (X_{N+1})$, ce qui n'est possible, vu les indices mis en jeu, que si f est nul. C'est absurde et donc l'un des fermés est plein : S est irréductible. ■

3.2 Parenthèse sur les espaces topologiques noethériens

Rappelons qu'on dit qu'un espace topologique est noethérien si toute suite décroissante de fermés stationne.

Un petite propriété :

Propriété 18 *Une réunion finie d'espaces topologiques nothériens est un espace topologique noethérien.*

Démonstration : Soit X un espace topologique. Soient X_i un nombre fini de sous-espaces de X qui sont noethériens. On note $Y = \bigcup_i X_i$. Montrons que Y est noethérien. Remarquons d'abord que quitte à prendre la topologie induite par X sur Y, on peut supposer $X = Y$. Soit donc $(F_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de fermés de X. Alors, les $(F_j \cap X_i)_{j \in \mathbf{N}}$ sont aussi décroissants et sont aussi des fermés. Comme X_i est un espace topologique noethérien, pour $j \geq N_i$, $F_j \cap X_i = F_{N_i} \cap X_i$. Pour j plus grand que le max N des N_i, on a bien que $F_j = F_j \cap (\bigcup_i X_i) = \bigcup_i (X_i \cap F_j) = \bigcup_i (X_i \cap F_N) = F_N$: X est noethérien.■

On peut énoncer le

Théorème 19 *Soit X un espace topologique noethérien. Alors, X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles.*

Démonstration : J'ai séché sur cette démo, heureusement que Grothendieck donne une indication dans EGA I, page 23. On effectue une récurrence noethérienne.

Soit X un espace topologique noethérien et soit donc E l'ensemble des parties fermés Y de X telles que Y n'a un nombre infini de composantes irréductibles.

Supposons (on raisonne par l'absurde) que E est non-vide. Alors, par noethériennité, E admet un plus petit élément Y. Y ne peut pas être lui-même un espace irréductible donc on peut écrire $Y = F \cup F'$ où F et F' sont des fermés stricts de Y. Par minimalité, F et F' ont un nombre fini de composantes irréductibles. On note C_i ces composantes irréductibles en nombre fini.

Soit alors C un fermé irréductible de Y. $C = \bigcup_i (C_i \cap C)$: on sait alors que tous les $C_i \cap C$ ne peuvent être tous des fermés stricts de C. Donc, C est contenu dans un des C_i. En particulier, les composantes irréductibles de Y sont à choisir parmi les C_i ; c'est absurde et donc X tout entier n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

■

3.3 La (locale) noethériennité entraîne la (locale) finitude des composantes irréductibles

Armé ce ces généralités sur les espaces topologiques noethériens, on peut énoncer :

Proposition 20 *Un schéma noethérien est un espace topologique noethérien et a donc un nombre fini de composantes irréductibles.*

Démonstration : D'après le théorème 18 et la propriété 17, il suffit de montrer qu'un schéma affine dont l'anneau des fonctions est noethérien est un espace topologique noethérien. Ce n'est pas compliqué : soit $X = \operatorname{Spec} A$ avec A un anneau noethérien. Les fermés de X sont en correspondances avec les idéaux radicaux de A. Soient $(F_i = V(I_i))_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés décroissante, où on a pris la précaution de choisir les idéaux I_i définissant nos fermés égaux à leur radicaux. Alors, les I_i sont des idéaux croissants donc stationnent. ■

On peut même affirmer :

Proposition 21 *Soit X un schéma localement noethérien. Alors, par tout point, il ne passe qu'un nombre fini de composantes irréductibles.*

Démonstration : Soit X un schéma localement noethérien. Soit $x \in X$; on peut trouver un ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ qui contient x, avec A noethérien. Notons C_i les composantes irréductibles de X qui passent par x. Alors, les $C_i \cap U = C'_i$ sont encore des fermés irréductibles (de U). En effet, $C_i \cap U$ est dense dans C_i et donc, d'après le lemme 11, est aussi irréductible.

En fait, ils sont aussi maximaux. En effet, soit Y un fermé de X tel que $U \cap Y$ est irréductible. Supposons que $C'_i \subset U \cap Y$. C'_i est dense dans C_i et on a $C_{i'} \subset Y$. Donc, $C_i \subset Y$. Plus précisément, on a $C_i \subset \overline{U \cap Y}$. Comme $U \cap Y$ est irréductible, $\overline{U \cap Y}$ l'est aussi et par maximalité, on a $C_i = \overline{Y \cap U}$. Donc, $Y \cap U \subset \overline{Y \cap U} = C_i$ et donc $Y \cap U \subset C'_i$. Donc en fait il y a égalié, ce qui prouve la maximalité des C'_i.

Or, U est noethérien donc n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

Que se passe-t-il si $C_i \cap U = C_j \cap U$? On prend l'adhérence des deux côtés et cela montre $C_i = C_j$.

Donc, il n'y a qu'un nombre fini de composantes irréductible qui passent par x. ■

Au passage, on a démontré le

Lemme 22 *Soit X un espace topologique dont on note C_i les composantes irréductibles. Soit U un ouvert (non-vide) de X. Alors, les $C_i \cap U$ non-vides sont des composantes irréductibles de U.*

(Voir EGA I, page 22, où Grothendieck dit qu'il y a correspondance biunivoque en fait)