Comment construit-on le composé de deux corps ?

Colas Bardavid

lundi 16 mai 2005

Résultats

Proposition 1 *Soient S et S' deux schémas qui ont respectivement des structures de k et de k'-schémas avec k et k' des corps (premiers) de caractéristiques distinctes. Alors $S \otimes_{\mathbf{Z}} S' = \varnothing$.*

Questions en suspens

Question 2 *Quelle information nous donne* $(\operatorname{Spec} L) \otimes_k (\operatorname{Spec} M)$ *sur l'ensemble des corps Ω au-dessus de L et de K ?*

Question 3 *Qu'est-ce que* $(\operatorname{Spec} L) \otimes_k (\operatorname{Spec} M)$ *?*

Piste de réponse 4 *Aller voir dans EGA 1, 1ère édition, p. 114.*

Aller voir dans Bourbaki, Algèbre, chapitre VIII, §8 la notion de type d'extension composée.

---

1 La question qu'on pose

On part de la situation, où k, L et M sont des corps.

$$\begin{tikzcd} & L \\ k \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "j"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

On veut construire un grand corps Ω, extension à la fois de L et de M tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, hook, "\varphi"] & \\ k \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "j"'] & & \Omega \\ & M \arrow[ur, hook, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

2 Réponse algébrique

La réponse figure dans le cours d'introduction à la géométrie algébrique d'Antoine Ducros.

On considère la k-algèbre $L \otimes_k M$. Elle est non-nulle car L et M sont des k-modules libres. On dispose aussi de structures de L et M algèbres : par exemple

$$\begin{array}{c} L \to L \otimes_k M \\ l \mapsto l \otimes 1 \end{array} .$$

Soit donc $\mathfrak{M}$ un idéal maximal. $(L \otimes_k M)/\mathfrak{M}$ est un corps qui hérite de $L \otimes_k M$ de structures de L et de M algèbres. Tout commute bien car on fait le produit tensoriel au-dessus de k.

3 Réponse géométrique

3.1 Réponse géométrique

On part de la même situation : L et M sont deux extensions de k. On en déduit deux k-schémas $\operatorname{Spec} L$ et $\operatorname{Spec} M$.

On peut alors faire leur produit : $S = (\operatorname{Spec} L) \otimes_k (\operatorname{Spec} K)$.

On est alors dans la situation

$$\begin{tikzcd} (\operatorname{Spec} L) \otimes_k (\operatorname{Spec} M) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \operatorname{Spec} M \arrow[d, "f"'] \\ \operatorname{Spec} L \arrow[r, "g"] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Si $(\operatorname{Spec} L) \otimes_k (\operatorname{Spec} M)$ est non-vide, c'est gagné. En effet, pour tout point $x \in (\operatorname{Spec} L) \otimes_k (\operatorname{Spec} M)$, les projections p_i induisent des injections entre les corps résiduels, c'est-à-dire $M \hookrightarrow \kappa(x)$ et $L \hookrightarrow \kappa(x)$. Les structures d'extensions de corps sont bien compatibles car la carré précédent commute.

Or montrer que $(\operatorname{Spec} L) \otimes_k (\operatorname{Spec} M)$ est non-vide, c'est montrer que $L \otimes_k M$ est non-nul, ce qu'on a vérifié dans la partie précédente.

3.2 Commentaires

Que se passe-t-il si on effectue le même raisonnement mais avec des corps qui n'ont pas même caractéristique ?

Ça ne va pas marcher. Soit en effet K et L deux corps de caractéristique différente. Par exemple [1], supposons que K est de caractéristique p et L de caractéristique q. Cette fois, on est dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} K \arrow[d, "f"'] \\ \operatorname{Spec} L \arrow[r, "g"] & \operatorname{Spec} \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

Mais le produit tensoriel $K \otimes_{\mathbf{Z}} L$ est nul. En effet, p et q sont premiers entre eux et donc il existe u et v entiers tels que $pu + qv = 1$. On a alors $1 \otimes 1 = pu \otimes 1 + qv \otimes 1 = qv \otimes 1 = 1 \otimes qv = 0$.

De façon plus générale :

Proposition 5 *Soient S et S' deux schémas qui ont respectivement des structures de k et de k'-schémas avec k et k' des corps (premiers) de caractéristiques distinctes. Alors $S \otimes_{\mathbf{Z}} S' = \varnothing$.*

[1] si on suppose que L est de caractéristique nulle, il suffit d'écrire $1 \otimes 1 = 1 \otimes p\frac{1}{p} = 0$.