

# Comment construit-on le composé de deux corps ?

Colas Bardavid

lundi 16 mai 2005

---

## Résultats

**Proposition 1** *Soient  $S$  et  $S'$  deux schémas qui ont respectivement des structures de  $k$  et de  $k'$ -schémas avec  $k$  et  $k'$  des corps (premiers) de caractéristiques distinctes. Alors  $S \otimes_{\mathbf{Z}} S' = \emptyset$ .*

---

## Questions en suspens

**Question 2** *Quelle information nous donne  $(\text{Spec } L) \otimes_k (\text{Spec } M)$  sur l'ensemble des corps  $\Omega$  au-dessus de  $L$  et de  $K$  ?*

**Question 3** *Qu'est-ce que  $(\text{Spec } L) \otimes_k (\text{Spec } M)$  ?*

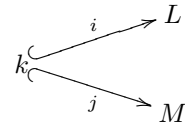
**Piste de réponse 4** *Aller voir dans EGA 1, 1ère édition, p. 114.*

*Aller voir dans Bourbaki, Algèbre, chapitre VIII, §8 la notion de type d'extension composée.*

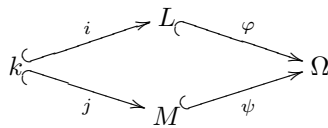
---

# 1 La question qu'on pose

On part de la situation, où  $k$ ,  $L$  et  $M$  sont des corps.



On veut construire un grand corps  $\Omega$ , extension à la fois de  $L$  et de  $M$  tel que le diagramme suivant commute.



# 2 Réponse algébrique

La réponse figure dans le cours d'introduction à la géométrie algébrique d'Antoine Ducros.

On considère la  $k$ -algèbre  $L \otimes_k M$ . Elle est non-nulle car  $L$  et  $M$  sont des  $k$ -modules libres. On dispose aussi de structures de  $L$  et  $M$  algèbres : par exemple

$$\begin{array}{l}
 L \rightarrow L \otimes_k M \\
 l \mapsto l \otimes 1
 \end{array}
 .$$

Soit donc  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal.  $(L \otimes_k M) / \mathfrak{m}$  est un corps qui hérite de  $L \otimes_k M$  de structures de  $L$  et de  $M$  algèbres. Tout commute bien car on fait le produit tensoriel au-dessus de  $k$ .

# 3 Réponse géométrique

## 3.1 Réponse géométrique

On part de la même situation :  $L$  et  $M$  sont deux extensions de  $k$ . On en déduit deux  $k$ -schémas  $\text{Spec } L$  et  $\text{Spec } M$ .

On peut alors faire leur produit :  $S = (\text{Spec } L) \otimes_k (\text{Spec } M)$ .

On est alors dans la situation

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Spec } L) \otimes_k (\text{Spec } M) & \xrightarrow{p_2} & \text{Spec } M \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow f \\
 \text{Spec } L & \xrightarrow{g} & \text{Spec } k
 \end{array}$$

Si  $(\text{Spec } L) \otimes_k (\text{Spec } M)$  est non-vidé, c'est gagné. En effet, pour tout point  $x \in (\text{Spec } L) \otimes_k (\text{Spec } M)$ , les projections  $p_i$  induisent des injections entre les

corps résiduels, c'est-à-dire  $M \hookrightarrow \kappa(x)$  et  $L \hookrightarrow \kappa(x)$ . Les structures d'extensions de corps sont bien compatibles car la carré précédent commute.

Or montrer que  $(\text{Spec } L) \otimes_k (\text{Spec } M)$  est non-vide, c'est montrer que  $L \otimes_k M$  est non-nul, ce qu'on a vérifié dans la partie précédente.

### 3.2 Commentaires

Que se passe-t-il si on effectue le même raisonnement mais avec des corps qui n'ont pas même caractéristique ?

Ça ne va pas marcher. Soit en effet  $K$  et  $L$  deux corps de caractéristique différente. Par exemple<sup>1</sup>, supposons que  $K$  est de caractéristique  $p$  et  $L$  de caractéristique  $q$ . Cette fois, on est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spec } K & \\ & \downarrow f & \\ \text{Spec } L & \xrightarrow{g} & \text{Spec } \mathbf{Z} \end{array}$$

Mais le produit tensoriel  $K \otimes_{\mathbf{Z}} L$  est nul. En effet,  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux et donc il existe  $u$  et  $v$  entiers tels que  $pu + qv = 1$ . On a alors  $1 \otimes 1 = pu \otimes 1 + qv \otimes 1 = qv \otimes 1 = 1 \otimes qv = 0$ .

De façon plus générale :

**Proposition 5** *Soient  $S$  et  $S'$  deux schémas qui ont respectivement des structures de  $k$  et de  $k'$ -schémas avec  $k$  et  $k'$  des corps (premiers) de caractéristiques distinctes. Alors  $S \otimes_{\mathbf{Z}} S' = \emptyset$ .*

---

<sup>1</sup>si on suppose que  $L$  est de caractéristique nulle, il suffit d'écrire  $1 \otimes 1 = 1 \otimes p \frac{1}{p} = 0$ .