Connexité d'un schéma affine

Colas Bardavid

samedi 16 avril 2005

Table des matières

Résultats

Proposition 1 *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine. Si X n'est pas connexe, alors $\mathcal{O}_X(X)$ possède deux idempotents e_1 et e_2 qui vérifient donc $e_i^2 = e_i$ et $e_1e_2 = 0$, $e_1 + e_2 = 1$ et $e_i \neq 0$.*

Exercice 2 *Soit A un anneau commutatif (tous mes anneaux sont unitaires). Soit $a \in A \setminus \{0, 1\}$ tel que $a^2 - a$ est niltpotent. Montrer qu'il existe $b \in A \setminus \{0, 1\}$ tel que $b^2 = b$.*

Questions en suspens

Petite conjecture 3 *Soit k un corps, A un anneau avec une flèche $k \to A$. Soit $P \in k[X]$ qui est scindé dans k. On suppose qu'il existe $f \in A$ telle que $P(f)$ est nilpotent. Alors, il existe $g \in A$ telle que $P(g) = 0$ et telle que $\forall x \in \operatorname{Spec} A, f(x) = g(x)$.*

Projet 4 *Cette conjecture est sûrement vraie. Essayer d'en trouver une plus générale.*

On s'intéresse à la connexité d'un schéma affine. On peut adopter deux points de vue.

1 Point de vue géométrique

1.1 Énoncé géométrique

Proposition 5 *Soit* $X = \operatorname{Spec} A$ *un schéma affine. Si* X *n'est pas connexe, alors* $\mathcal{O}_X(X)$ *possède deux idempotents* e_1 *et* e_2 *qui vérifient donc* $e_i^2 = e_i$ *et* $e_1 e_2 = 0$*,* $e_1 + e_2 = 1$ *et* $e_i \neq 0$*.*

Remarque : Géométriquement, e_1 et e_2 sont des fonctions qui valent 1 sur une composante connexe et 0 sur l'autre.

1.2 Démonstration géométrique

Elle m'a été donnée par Antoine Ducros quand j'étais venu le voir pour lui présenter ma démonstration algébrique.

Elle est très simple et utilise l'outil que constitue le faisceau sur X. Si X n'est pas connexe, on l'écrit $X = U \cup V$ où U et V sont deux ouverts non-vides et disjoints. On prend pour e_1 la section globale dont la restriction à U est 1 et dont la restriction à V est 0. Elle existe car les sections peuvent être définies par recollement (axiome des faisceaux) et car, ici, elles coïncident sur leur intersection, qui est vide ! On fait la même chose pour e_2. On constate alors que $e_1^2 - e_1$ est nul quand restreint à U et à V ; ainsi, grâce à l'axiome de détermination locale, on sait que $e_1^2 - e_1 = 0$. De la même façon, on montre que e_2 est idempotent, que $e_1 e_2 = 0$ et enfin que $e_1 + e_2 = 1$. Le fait que les e_i sont non-nuls vient du fait que l'une de leur restriction est non-nulle.

2 Point de vue algébrique

On choisit de l'exprimer sous cette forme :

2.1 Énoncé algébrique

Exercice 6 *Soit* A *un anneau commutatif (tous mes anneaux sont unitaires). Soit* $a \in A \setminus \{0,1\}$ *tel que* $a^2 - a$ *est niltpotent. Montrer qu'il existe* $b \in A \setminus \{0,1\}$ *tel que* $b^2 = b$*.*

2.2 Démonstration algébrique

2.2.1 Début de la démonstration

Montrons d'abord comment on se ramène à cet exercice d'algèbre commutative. Ce n'est pas compliqué.

Supposons que $X = \text{Spec}\, A$ soit non-connexe. On l'écrit donc $X = F_1 \cup F_2$, avec $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $F_i \neq \varnothing$, où $F_i = V(I_i)$ où I_i est un idéal de A qu'on peut supposer égal à son radical.

On a que $I_1 + I_2$ est égal à A. Sinon, on peut trouver $\mathfrak{m}$, idéal maximal, contenant I_1 et I_2 et donc dans l'intersetion de F_1 et de F_2. On peut donc trouver $f_i \in I_i$ tels que $f_1 + f_2 = 1$. On a alors que $\forall x \in F_1, f_1(x) = 0$ et $\forall x \in F_2, f_1(x) = 1$.

En particulier, $\forall x \in X, (f_1^2 - f_1)(x) = 0$. Donc : $f_1^2 - f_1$ est nilpotent. Dans la suite, pour simplifier les écritures, on note $f_1 = f$.

2.2.2 Intermède heuristique

Définition 7 (Le Petit Robert) *Heuristique : qui sert à la découverte.*

Le problème c'est qu'on cherche f telle qu'on ait vraiment $f^2 = f$. Intuitivement, on a que f est une fonction qui vaut $1 + \varepsilon$ sur U, ε sur V où ε est un infiniment petit. Comme $f^2 - f$ est nilpotent, disons que $(f^2 - f)^N = 0$ et donc, l'infiniment petit ε est un infiniment petit de développement limité à l'ordre N.

On cherche une transformation à faire (génériquement) sur f pour que l'obtienne $1 + \varepsilon^2$ ou ε^2 sur les deux ouverts.

Sur la partie où f vaut $1 + \varepsilon$, on peut regarder $f^2 = 1 + 2\varepsilon + \ varepsilon^2$ et donc considérer $2f - f^2 = 1 - \varepsilon^2$, c'est-à-dire la transformation $f \to 2f - f^2$.

Cependant, sur la partie où f vaut ε, cette transformation donne $2\varepsilon - \varepsilon^2$, ce qui ne convient pas. En revanche la transformation $f \to f^2$ convient.

Heuristiquement, on en conclut que les fonctions $g = (2f - f^2)^2$ ou $h = 2f^2 - f^4$ vérifient que $g^2 - g$ et $h^2 - h$ sont nilpotentes d'indice de nilpotence strictement plus petit que celui de $f^2 - f$.

2.2.3 Conclusion : résolution de l'exercice

Vérifions que ceci est vrai pour les deux transformations proposées.

D'une part, $g^2 - g = g(g-1) = g(2f - f^2 - 1)(2f - f^2 + 1) = -(f-1)^2 f^2 (2-f)^2 (2f - f^2 + 1) = (f^2 - f)^2 k$: on a donc bien que $g^2 - g$ est d'indice de nilpotence inférieur à $N/2$. Notons qu'on a toujours que g est non-nulle et non-égale à 1 car, évaluée en $x \in F_1$ et $x \in F_2$, elle prend les valeurs 0 et 1.

Pour l'autre transformation, $h^2 - h = h(h-1) = f^2(2-f^2)(f^2(2-f^2)-1) = f^2(2-f^2)(2f^2 - f^2 - 1) = -f^2(2-f^2)(f^2-1)^2 = -f^2(f-1)^2(2-f^2)(f+1)^2 = (f^2 - f)^2 l$, et on conclut identiquement.

Finalement, en itérant la transformation, on obtient une fonction $e_1 \in A$ telle que $e_1 \neq 0, 1$ et $e_1^2 = e_1$. Il suffit de poser $e_2 = 1 - e_1$ pour conclure la démonstration de la proposition.

2.3 Généralisation

Voici une piste pour généraliser.

Petite conjecture 8 *Soit k un corps, A un anneau avec une flèche $k \to A$. Soit $P \in k[X]$ qui est scindé dans k. On suppose qu'il existe $f \in A$ telle que $P(f)$ est nilpotent. Alors, il existe $g \in A$ telle que $P(g) = 0$ et telle que $\forall x \in \operatorname{Spec} A, f(x) = g(x)$.*

Le résultat suivant est faux :

Petite déception 9 *Soit A un anneau. Soit $P \in A[X]$. On suppose qu'il existe $f \in A$ telle que $P(f)$ est nilpotent. Alors, il existe $g \in A$ telle que $P(g) = 0$ et telle que $\forall x \in \operatorname{Spec} A, f(x) = g(x)$.*

grâce au contre-exemple :

Contre-exemple 10 *On prend $A = k[X]/X^N$, l'anneau contenant k plus un nilpotent générique η. On considère alors le polynôme $P(X) = \eta X$: $P(1)$ est nilpotent et on ne peut pas trouver $f \in A$ telle que $f(\star) = 1$ et $\eta f = 0$.*

Je pense qu'il vaut mieux envisager cette conjecture sous le point de vue géométrique (théorie des faisceaux) que sous le point de vue algébrique (trop difficile).