Contre-exemple : le préfaisceau des $\operatorname{Im}\varphi_U$ n'est pas nécessairement un faisceau

Colas Bardavid

lundi 16 mai 2005

On prend $X = \mathbf{C}^n$.
On prend $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\omega$.
On prend $\mathcal{G} = \mathcal{C}^\infty$.
Soient alors $x, y \in \mathbf{C}^n$ deux points distincts.
Soient U et V deux petites boules disjointes centrées en x.
Soient $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$ telle que g est positive, g est nulle en dehors de U et V et g vaut 1 localement autour de x et de y.

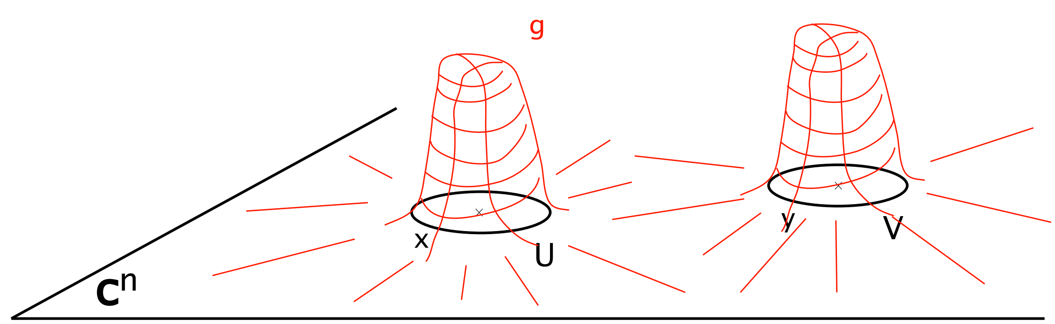

FIG. 1 – La fonction plateau g

On considère alors le morphisme de faisceau $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, défini par :

$$\varphi_W : \begin{array}{c} \mathcal{F}(W) = \mathcal{C}^\omega(W) \to \mathcal{C}^\infty(W) = \mathcal{G}(W) \\ f \mapsto fg \end{array} .$$

Alors, $\operatorname{Im}\varphi$ vérifie logiquement la propriété de définition locale, puisque c'est un sous-préfaisceau d'un faisceau.

Mais, φ ne vérifie pas la propriété de définition par recollement. En effet, si $f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{C}^n)$ est constante sur un ouvert, alors, f est constante partout. Ainsi, les fonctions globales du préfaisceau $\operatorname{Im} \varphi$ qui sont constantes et valent 1 localement autour de x sont aussi localement constantes et égales à 1 autour de y.

Cependant, en se restreignant aux ouverts U et V, on peut construire des fonctions localement constantes autour de x ou de y et de valeur quelconque. Elles se recollent parfaitement : la fonction g est faite pour ça.