Un contre-exemple concernant les fibres pour un morphisme d'espaces annelés

Colas Bardavid

jeudi 12 mai 2005

1 Le contexte

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés. Soit $(f, f^\#)$ un morphisme entre X et Y.

C'est-à-dire que pour tout $U \underset{\circ}{\hookrightarrow} X$, on dispose de :

$$f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \to (f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$

On sait aussi que pour tout point $P \in X$, on dispose d'un morphisme entre les fibres :

$$f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}.$$

Cependant, attention, on n'a pas :

$$\boxed{\varinjlim_{U \ni f(P)} (f_*\mathcal{O}_X)(U) \neq \mathcal{O}_{X,P}.}$$

2 Le contre-exemple

On se place dans le cadre de la théorie des schémas.

Soit $f : \mathbf{A}_k^1 \to \operatorname{Spec} k$ qui correspond à l'inclusion de k dans $k[X]$, qui envoie tous les points de $\mathbf{A}_k^1$ sur l'unique point de $\operatorname{Spec} k$.

Comme $\operatorname{Spec} k$ n'a pas beaucoup d'ouverts, on doit juste regarder

$$f_{\operatorname{Spec} k}^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} k) = k \to f_*\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^1}(f^{-1}(*)) = \mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^1}(\mathbf{A}_k^1) = k[X].$$

En particulier, si P est un point de $\mathbf{A}_k^1$, $\varinjlim_{U \ni f(P)} (f_*\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^1})(U) = k[X]$, qui est bien différent de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^1, P}$.

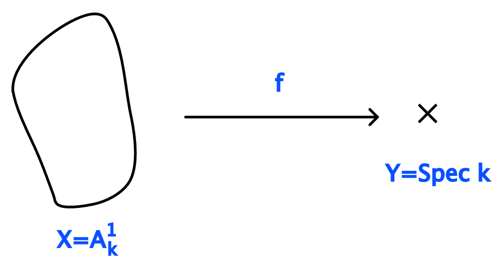

FIG. 1 – C'est très important de faire des dessins