Corps des fractions d'un anneau d'entiers

Colas Bardavid

mercredi 8 juin 2005

Résultats

Théorème 1 *Soit K un corps de nombres. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Alors, $\operatorname{Frac} \mathcal{O}_K = K$.*

Questions en suspens et travail à faire

Question 2 *Comment généraliser un peu ce résultat ?*

Ce n'est pas compliqué :

Théorème 3 *Soit K un corps de nombres. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Alors, $\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}_K = K$.*

Démonstration : Soit $x \in K$. x est $\mathbf{Q}$-algébrique. Soit donc $P \in \mathbf{Q}[x]$, non-nul, tel que $P(x) = 0$. On écrit

$$P = \sum_{i=0}^{N} \frac{n_i}{d_i} X^i,$$

où les n_i et les d_i sont entiers.

En multipliant P par le ppcm des d_i, on obtient un polynôme $Q \in \mathbf{Z}[X]$, mais qui n'est plus forcément unitaire. On écrit $Q = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$, où les $a_i \in \mathbf{Z}$. On multiplie Q par a_N^{N-1}. On a alors :

$$(a_N)^{N-1} Q = (a_N X)^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i {a_N}^{N-i-1} (a_N X)^i.$$

En particulier, on voit que $a_N x \in K$ est un élément entier, annulé par le polynôme $R(Y) = Y^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i {a_N}^{N-i-1} Y^i$.

Comme $a_N \in \mathbf{Z}$ est en particulier un entier de K, x est le quotient de deux entiers. Et donc : $\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}_K = K$. ■