Décomposition d'un polynôme homogène à deux variables à coefficients dans un corps algébriquement clos

Colas Bardavid

jeudi 9 juin 2005

Théorème 1 *Soit k un corps algébriquement clos. Soit $P \in k[X, Y]$ homogène. Alors, on peut décomposer $P = \prod_{i=1}^{n}(a_i X - b_i Y)$.*

Démonstration : Notons n le degré de P : $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i Y^{n-i}$. Donc,

$$\frac{P}{Y^n} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(\frac{X}{Y}\right)^i .$$

On étudie donc le polynôme $Q(T) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T^i \in k[T]$ qui est se scinde dans k : $Q = \lambda_n \prod_{i=1}^{n}(T - x_i)$.

Donc :

$$\frac{P}{Y^n} = \lambda_n \prod_{i=1}^{n}(\frac{X}{Y} - x_i).$$

Et donc, $P = \lambda_n \prod_{i=1}^{n}(X - x_i Y)$, ce qu'on voulait. ■