Un morphisme d'espaces annelés est déterminé par les morphismes entres les anneaux de germes

Colas Bardavid

lundi 6 juin 2005

Résultats

Théorème 1 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux espaces annelés. Soit* (φ, Φ) *et* (ψ, Ψ) *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{TopAnn}}(X, Y)$*. On suppose que* $\varphi = \psi$ *(ce qu'on peut détecter en regardant la famille des morphismes entre les germes).*
Alors, $\Phi = \Psi$ *si, et seulement si, pour tout* $x \in X, \Phi_x = \Psi_x$*.*

Principe 2 *Un morphisme entre espaces annelés, ça se teste sur les germes.*

Principe 3 *Un morphisme d'espace annelé, c'est la même chose que la famille de ses morphismes induits entre les germes.*

Questions en suspens et travail à faire

Question 4 *Comment tester sur une famille de morphismes entre des anneaux de germes que cette famille de morphismes vient d'un morphisme global entre des espaces annelés.*

Question 5 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux espaces annelés. Soit* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$*. Pour tout* x*, soit* $\Phi_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathcal{O}_{Y,f(x)}, \mathcal{O}_{X,x})$*. À quelle condition cette famille provient d'un morphisme entre espaces annelés ?*

Petite conjecture 6 *Première idée : la condition est une condition de recollement (à préciser).*

Comme d'habitude, on note **TopAnn** la catégorie des espaces annelés.

On va démontrer :

Théorème 7 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux espaces annelés. Soit* (φ, Φ) *et* (ψ, Ψ) *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{TopAnn}}(X, Y)$*. On suppose que* $\varphi = \psi$ *(ce qu'on peut détecter en regardant la famille des morphismes entre les germes).*
Alors, $\Phi = \Psi$ *si, et seulement si, pour tout* $x \in X, \Phi_x = \Psi_x$*.*

Autrement dit,

Principe 8 *Un morphisme entre espaces annelés, ça se teste sur les germes.*

Démonstration : Ce n'est pas compliqué.

Soit U un ouvert de Y. On veut montrer que $\Phi_U = \Psi_U$. Soit donc $f \in \mathcal{O}_Y(U)$. On veut montrer que $\Phi_U(f) = \Psi_U(f)$. Pour montrer que ces deux fonctions sont égales, il suffit de montrer qu'elles ont même germe en tout point. Soit donc $x \in U$. On sait que $\mathcal{G}_x\left(\Phi_U(f)\right) = \Phi_x(\mathcal{G}_{\varphi(x)} f)$. Donc, c'est égal à $\Psi_x(\mathcal{G}_{\psi(x)} f)$. Donc à $\mathcal{G}_x \Psi_U f$. Donc, c'est fini. ■

Dit autrement :

Principe 9 *Un morphisme d'espace annelé, c'est la même chose que la famille de ses morphismes induits entre les germes.*

Naturellement, on se pose la question :

Question 10 *Comment tester sur une famille de morphismes entre des anneaux de germes que cette famille de morphismes vient d'un morphisme global entre des espaces annelés.*

Plus précisément :

Question 11 *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux espaces annelés. Soit* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$*. Pour tout* x*, soit* $\Phi_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathcal{O}_{Y,f(x)}, \mathcal{O}_{X,x})$*. À quelle condition cette famille provient d'un morphisme entre espaces annelés ?*

Petite conjecture 12 *Première idée : la condition est une condition de recollement (à préciser).*