Espaces localement fermés

Colas Bardavid

vendredi 8 avril 2005

Dans toute la suite, X est un espace topologique.

Définition 1 *Soit Y une partie de X. On dit que Y est localement fermée si $\forall y \in Y, \exists U \in \mathcal{V}_X(y)$ tel que $Y \cap U$ est fermé dans U.*

Cependant, généralement, on donne une autre définition de localement fermé. Nous préférons l'exprimer dans la proposition qui suit.

Proposition 2 *Soit Y une partie de X. Alors, Y est localement fermée si, et seulement si, il existe O ouvert de X et F fermé tels que $Y = O \cap F$.*

Démonstration : Dans un sens, c'est facile puisque si Y s'écrit $O \cap F$ et si $y \in Y$, O est un voisinage de y et $Y \cap O = O \cap F$ est bien fermé dans O.

Dans l'autre sens, montrons que Y est ouverte dans $\bar{Y}$. Soit $y \in Y$; il existe $U \in \mathcal{V}_X(y)$ tel que $Y \cap U$ est fermé dans U. Montrons qu'alors on a $Y \cap U = \bar{Y} \cap U$. Soit $y \in \bar{Y} \cap U$ et supposons que $y \notin Y \cap U$. Comme $Y \cap U$ est fermé dans U, il existe V ouvert que $y \in V$ et $V \cap (Y \cap U) = \varnothing$. Cependant $y \in \bar{Y}$ donc $(V \cap U) \cap Y$ devrait être non-vide, ce qui est absurde. On en déduit que $Y \cap U = \bar{Y} \cap U$. Par conséquent, $y \in \bar{Y} \cap U = Y \cap U \subset Y$ donc Y est voisinage (dans $\bar{Y}$) de tous ses points. Donc Y est un ouvert de $\bar{Y}$.■

Fait 3 *Tout ouvert et tout fermé est localement fermé.*

Propriété 4 *L'ensemble des parties localement fermées est stable par intersection finie.*

Démonstration : Soit $(Y_i)_{0 \leq i \leq m}$ m parties localement fermées. Soit $y \in \bigcap_i Y_i$. Pour tout i on peut alors trouver $U_i \in \mathcal{V}_X(y)$ tel que $U_1 \cap Y_1$ soit fermé dans U_1. Alors :

$$\left(\bigcap_i Y_i\right) \cap \left(\bigcap_i U_i\right) = \left(\bigcap_i Y_i \cap U_i\right) = \left(\bigcap_i F_i \cap U_i\right) = \left(\bigcap_i U_i\right) \cap \left(\bigcap_i F_i\right)$$

Et donc $(\bigcap_i Y_i)$ est fermée dans $(\bigcap_i U_i)$ qui est bien un voisinage de y. ■

Cependant la liste des bonnes propriétés s'arrête là.

Déception 5 *L'ensemble des parties localement fermées n'est stable ni par union finie ni par union quelconque ni par intersection quelconque.*

Pour le montrer, voici des contre-exemples.

Contre-exemple 6 (pour l'union quelconque) *On se place dans* $\mathbf{R}$. *Pour tout point* x, $\{x\}$ *est fermé donc localement fermé. Cependant,* $\bigcup_{x\in\mathbf{Q}}\{x\} = \mathbf{Q}$ *n'est pas localement fermé dans* $\mathbf{R}$.

Contre-exemple 7 (pour l'intersection quelconque) *On se place dans* $\mathbf{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}$ *est ouvert donc localement fermé. Cependant,* $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^\star} \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{n}\} = \mathbf{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ *n'est pas localement fermé, comme on peut le voir autour de* 0.

Contre-exemple 8 (pour l'union finie) *On se place dans le schéma* $\mathbf{A}^2_k$, *disons avec* k *algébriquement clos. Soit alors* $Y_1 = D(X)$ *qui est ouvert (donc localement fermé) et* $Y_2 = \{(0,0)\}$ *qui est fermé. Alors,* $Y_1 \cup Y_2$ *n'est pas localement fermé.*

Remarque : On se doutait que les localement fermés ne sont pas stables par union finie, grâce à la remarque de Hartshorne dans *Algebraic geometry*, page 94.
Démonstration : D'abord, on a $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \mathbf{A}^2_k$: en effet, $Y_1 \cup Y_2$ contient un ouvert, qui est dense car $\mathbf{A}^2_k$ est irréductible. Pour montrer que $Y_1 \cup Y_2$ est localement fermé, il faut montrer que $Y_1 \cup Y_2$ est ouvert dans $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \mathbf{A}^2_k$. Il faut donc trouver I un idéal de fonctions telles que $Y_1 \cup Y_2 = \mathbf{A}^2_k \setminus V(I)$ c'est-à-dire tel que $V(I) = \{(x,0), x \neq 0\}$. Cependant, si f s'annule sur $\{(x,0), x \neq 0\}$, f s'annule aussi en $(0,0)$. En effet, écrivons $P(X,Y) = \sum_{0\leq i\leq N} Q_i(Y)X^i \in k(Y)[X]$; $R(X) = P(X,0)$ s'annule pour $x \neq 0$. Comme k est algébriquement clos, k est infini donc R a une infinité de racines, donc R est nul et donc $P(0,0) = 0$. On a prouvé que $\overline{\{(x,0), x \neq 0\}} = V(Y)$ et même mieux que si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in k$ alors $\overline{V(Y) \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} = V(Y)$. Cela conclut la démonstration. ■

Références

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale, éléments de mathématique*, 4ème édition, ch. I, §1.4