Propriétés schématiques globales qu'on peut localiser

Colas Bardavid

vendredi 29 avril 2005

Table des matières

Résultats

Lemme 0.1 *Soit* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma quasi-compact. Soit* $f \in \mathcal{O}_X(X)$ *telle que* $V(f) = X$*. Alors,* f *est nilpotente.*

Proposition 0.2 *Soit* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma quasi-compact. Soit* U *un ouvert dense dans* X*. Soit* $f \in \mathcal{O}_X(X)$ *telle que* $f\mid_U = 0$*. Alors* f *est nilpotente.*

Proposition 0.3 *Soit* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma affine dont l'anneau des fonctions globales est intègre. Soit* U *un ouvert dense dans* X*. Soit* f *une fonction globale telle que* $f|_U = 0$*. Alors :* $f = 0$*.*

Théorème 0.4 *Soit* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma affine tel que l'anneau des fonctions globales* $\mathcal{O}_X(X)$ *soit intègre. Alors,* $(X, \mathcal{O}_X)$ *est intègre.*

Questions en suspens et travail à faire

Conjecture 0.5 *Il existe un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$, forcément non-recouvrable par un nombre fini d'ouverts affines, tel qu'il existe un ouvert U dense dans X et $f \in \mathcal{O}_X(X)$ tels que : $f|_U = 0$ mais f n'est pas nilpotente.*

Travail à faire 0.6 *Trouver un schéma X avec $\mathcal{O}_X(X)$ intègre et cependant $\mathcal{O}_X(U)$ non-intègre pour un ouvert U bien choisi.*

Projet 0.7 *Soit $\mathcal{C}$ une (petite ?) catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ est irréductible (ou bien intègre ?) si pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ann}$, la limite projective*

$$\underset{U \in \mathcal{C}}{\underrightarrow{\textit{lim proj}}}\, F(U)$$

est encore intègre.

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine irréductible réduit. Si on note $\mathcal{C}_X$ la catégorie des ouverts affines de X. Alors, on a montré que $\mathcal{C}_X$ est irréductible.

Question 0.8 *Est-ce que ce que je raconte est vrai ? Comment cela se généralise-t-il pour les schémas ? Et ailleurs ?*

Il semble que ce soit surtout sur un schéma affine qu'on peut localiser des propriétés globales.

1 L'intégrité globale d'un schéma affine entraîne son intégrité

1.1 Préliminaires algébrico-topologiques

1.1.1 Dans un espace irréductible, un ouvert est dense et irréductible

Lemme 1.1 *Soit X un espace irréductible. Soient $(F_i)_{i \leq N}$ une famille finie de fermés non pleins. Alors, $\bigcup_{i \leq N} F_i \subsetneq X$.*

Démonstration : On procède par récurrence sur N. Pour $N = 1$, c'est trivial. Pour $N = 2$, c'est la définition d'un espace irréductible. Supposons que ce soit vrai au rang N. On prend une famille $(F_i)_{i \leq N+1}$ de fermés non pleins ; alors, $F_1 \cup F_2$ est non plein (et c'est encore un fermé) et donc $(F_1 \cup F_2) \cup \bigcup_{i \leq N} F_i \subsetneq X$. ■

Lemme 1.2 *Soit X un espace topologique irréductible. Soit U un ouvert non-vide de X. Alors, U est dense dans X et est irréductible pour la topologie induite.*

Démonstration : Montrons d'abord que U est dense dans X. Soit $x \in X$ et soit $V \in \mathcal{V}(x)$. On veut montrer que $U \cap V \neq \varnothing$. En dualisant, on veut donc montrer que $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) \neq X$. Or, ces deux ensembles sont fermés et non pleins, car U est non-vide et car V contient x. Comme X est irréductible, leur union ne peut donc être pleine.

Montrons maintenant que U est irréductible pour la topologie induite. Soient F et F' deux fermés non-pleins de U : on peut trouver G et G', fermés de X tels que $F^{'} = X \cap G^{'}$. Notons $H = X \setminus U$, qui est un fermé non plein. D'ailleurs, G et G' eux-aussi sont non pleins, sinon F ou F' serait plein dans X. Supposons qu'on ait $F \cup F' = U$; on aurait alors $F \cup F' \cup H = X$ et donc en particulier $G \cup G' \cup H = X$, ce qui contredit le lemme 1.1. ■

1.1.2 Une fonction schématique nulle sur un ouvert dense est-elle nulle partout ?

La réponse est non !

Voici un contre-exemple :

Contre-exemple 1.3 (en plus, avec un schéma affine) *Il existe un schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, un ouvert U dense dans X et $f \in \mathcal{O}_X(X)$ telle que $f \mid_U = 0$ mais $f \neq 0$.*

Démonstration : On considère l'intéressante droite $D_{MB}(k) = \operatorname{Spec} \frac{k[f_x, f_y]}{(f_x f_y, f_y^2)}$. Soit alors $U = D(f_x)$. Montrons que U est dense dans $D_{MB}(k)$. Soit I un idéal

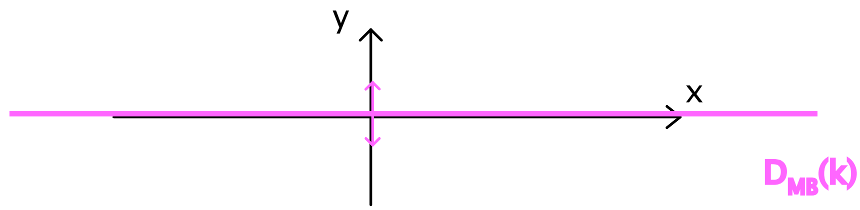

FIG. 1 – L'intéressante droite $D_{MB}(k)$.

de fonctions tel que $U \subset V(I)$. Soit $f \in I$. Connaissant le schéma, on sait qu'on peut écrire $f = P(x) + cy$.

On suppose que k est algébriquement pour se placer dans une situation plus géométrique. Comme le point classique $(x, 0)$ est dans U si $x \neq 0$, il annule f et donc $P(x) = 0$. Comme on a une infinité de tels x, c'est que P est nul. Donc $f = cy$.

Calculons $V(y)$ pour montrer que c'est toute la droite. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\frac{k[x,y]}{(xy,y^2)}$. C'est un idéal de $k[x, y]$ qui contient xy et y^2. Si c'est un idéal maximal, il est du type $(x - \alpha) + (y - \beta)$; comme il contient y^2, il est forcément du type $(x - \alpha) + (y)$ et donc appartient à $V(y)$. Si c'est un idéal premier non maximal, il est du type (P) avec P polynôme irréductible. Comme $y^2 \in (P)$, on a forcément que $P = y$. Donc (P) est encore dans $V(y)$.

Au passage, on a classifié les points de $D_{MB}(k)$. Il y a les points fermés et le point (y) qui est dense : c'est le point générique de $D_{MB}(k)$, qui est donc irréductible en tant qu'espace topologique.

Revenons à nos moutons : $U = D(f_x)$ est dense dans $D_{MB}(k)$. Maintenant, on regarde la fonction $f_y \in \frac{k[f_x,f_y]}{f_x f_y, f_y^2}$. Elle n'est pas nulle mais elle est nilpotente, d'ordre 2. Cependant, si on regarde sa restriction à l'ouvert U, elle devient nulle, puisqu'on a à la fois $f_x f_y = 0$ et f_x inversible. ■

On peut cependant énoncer un résultat plus faible, très naturel dans le cadre de la théorie des schémas :

Proposition 1.4 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma quasi-compact. Soit U un ouvert dense dans X. Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$ telle que $f\ |_U = 0$. Alors f est nilpotente.*

Pour démontrer cette proposition, servons-nous du :

Lemme 1.5 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma quasi-compact. Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$ telle que $V(f) = X$. Alors, f est nilpotente.*

Démonstration : (du lemme)

Soit $(U_i)_{i \leq N}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. On a que $V(f\ |_{U_i})$ est égal à U_i. Comme U_i est un ouvert affine, on sait que $f\ |_{U_i}$ est nilpotente : on pose $n_i \in \mathbf{N}^*$ tel que $f|_{U_i}{}^{n_i} = 0$. Si maintenant on pose $n =$

$\max_{i \leq N} n_i$, alors, on a $f^n = 0$. En effet, $(f^n)|_{U_i} = (f|_{U_i})^n = 0$ car $n \geq n_i$. D'après le principe de détermination locale, on a que $f^n = 0$. ■

On sent bien dans cette démonstration que la finitude du recouvrement est indispensable pour démontrer le résultat :

Conjecture 1.6 *Il existe un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$, forcément non-recouvrable par un nombre fini d'ouverts affines, tel qu'il existe un ouvert U dense dans X et $f \in \mathcal{O}_X(X)$ tels que : $f|_U = 0$ mais f n'est pas nilpotente.*

Démonstration : (de la proposition)

En effet, si on regarde le fermé $V(f)$, on a bien que $U \subset V(f)$: en effet, on sait que $f(x)$ ne dépend que de $\mathcal{G}_x f$; mais, ici, si $x \in U$, $\mathcal{G}_x f = 0$. Donc, $V(f) = X$. On conclut grâce au lemme.■

Voici un cas particulier de ce résultat :

Proposition 1.7 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma quasi-compact dont l'anneau des fonctions globales est intègre. Soit U un ouvert dense dans X. Soit f une fonction globale telle que $f|_U = 0$. Alors : $f = 0$.*

1.1.3 Intégrité et irréductibilité

On va montrer :

Proposition 1.8 *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schém affine avec A intègre. Alors, X est irréductible.*

Démonstration : On donne une démonstration géométrique[1].

On écrit $X = V(I_1) \cup V(I_2)$ avec $V(I_i) \neq X$. Donc il existe deux points x_i et deux fonctions $f_i \in I_i$ tels que $f_i(x_i) \neq 0$. Soit x un point quelconque de X. Alors, $x \in V(I_1)$ ou $x \in V(I_2)$ et donc, nécessairement, $f_1 f_2(x) = 0$. Donc, $f_1 f_2$ est nilpotente. Donc, $f_1 f_2 = 0$. Donc, par exemple, $f_1 = 0$. C'est absurde car f_1 ne s'annule pas en x_1. ■

Hartshorne montre mieux :

Résultat non démontré 1.9 *Soit X un schéma. Alors, X est intègre si, et seulement si, X est irréductible et réduit.*

---

[1] Voici une mauvaise démonstration (trop algébrique pas assez géométrique) :

Écrivons $X = F_1 \cup F_2$ où les $F_i = V(I_i)$ sont des fermés non-vides. On suppose que les F_i sont non pleins. Alors, nécessairement, les I_i sont non-nuls. Soient donc $a \in I_1$ et $b \in I_2$ deux éléments non-nuls. ab est aussi non-nul. Soit $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A$. On a soit $I_1 \subset \mathfrak{P}$ soit $I_2 \subset \mathfrak{P}$. Donc, on a soit a dans $\mathfrak{P}$ soit $b \in \mathfrak{P}$. Dans tous les cas, $ab \in \mathfrak{P}$. En particulier, ab est dans $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}$, cette dernière intersection étant l'ensemble des nilpotents de A, qui ici est nul. C'est absurde.

1.2 L'intégrité globale d'un schéma affine entraîne son intégrité

Énonçons le théorème qu'on va prouver :

Théorème 1.10 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma affine tel que l'anneau des fonctions globales $\mathcal{O}_X(X)$ soit intègre. Alors, $(X, \mathcal{O}_X)$ est intègre.*

Rappelons quand même la

Définition 1.11 *Un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$ est dit intègre si pour tout ouvert U (non-vide) de X, $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre.*

On va décomposer la preuve du théorème 1.10 en plusieurs petits résultats. Dans toute la suite, on fixe $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma affine tel que l'anneau des fonctions globales $\mathcal{O}_X(X)$ soit intègre.

1.2.1 Intégrité des ouverts distingués

Proposition 1.12 *Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$, non inversible. Alors $\mathcal{O}_X(D(f))$ est intègre.*

Démonstration : Traitons d'abord le cas où $X = \operatorname{Spec} A$ avec A intègre. On a alors que $\mathcal{O}_X(D(f))$ est l'anneau A_f qui est intègre.

Maintenant, si $S = (X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma affine, soit $S \xrightarrow{(\varphi,\Phi)} S' = \operatorname{Spec} A$ un isomorphisme, avec A intègre. Soit alors $\tilde{f} \in A$ telle que $\Phi_{S'}(\tilde{f}) = f$. On sait alors qu'on a $D(\Phi_{S'}(\tilde{f})) = D(f) = \varphi^{-1}(D(\tilde{f}))$. Or, $\Phi_{D(\tilde{f})}$ est un isomorphisme entre $\mathcal{O}_{S'}(D(\tilde{f}))$ et $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(D(\tilde{f}))) = \mathcal{O}_X(D(f))$.

Donc, $\mathcal{O}_X(D(f))$ est intègre. ■

1.2.2 Intégrité des ouverts quelconques

Pour passer des ouverts distingués aux ouverts quelconques, on effectue une limite projective.

Proposition 1.13 *Soit U un ouvert quelconque de X. Alors $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre.*

Démonstration : Comme $D(f)$ est une base d'ouverts de X, on sait que $\mathcal{O}_X(U)$ est la limite projective des $\mathcal{O}_X(D(f))$ pour $D(f) \subset U$:

$$\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{D(f)\subset U} \mathcal{O}_X(D(f)).$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{O}_X(U) \simeq \left\{ (\varphi_f)_f \in \prod_{D(f)\subset U} \mathcal{O}_X(D(f)) \mid D(f') \subset D(f) \Rightarrow \rho_{D(f)\to D(f')}(\varphi_f) = \varphi_{f'} \right\}.$$

Montrons que ce dernier anneau est intègre. Soit deux familles cohérentes $(\varphi_f)_f$ et $(\psi_f)_f$ telles que $(\varphi_f) \cdot (\psi_f) = 0$, c'est-à-dire : pour tout f admissible [2], $\varphi_f \psi_f = 0$. Pour conclure que l'une des familles est nulle, on a besoin de vérifier certaines conditions géométriques sur l'ouvert U. C'est ce qu'on va faire.

Déjà, pour chaque f admissible, vu que $\mathcal{O}_X(D(f))$ est intègre, on a soit $\varphi_f = 0$ soit $\psi_f = 0$. Supposons que les choses se passent mal, c'est-à-dire que il existe f_1 et f_2 admissibles telles que $\varphi_{f_1} \neq 0$ et $\psi_{f_2} \neq 0$ (cela implique notamment que les ouverts $D(f_i)$ sont non nuls).

Or, X est irréductible. Donc U, en tant qu'ouvert, l'est aussi. Donc les $D(f_i)$, qui sont ouverts, sont denses dans U. Donc, leur intersection est non-vide. Comme les $D(f)$ forment une base de la topologie de X, on peut trouver f_3 telle que $D(f_3) \subset D(f_1) \cap D(f_2)$. Comme nos familles sont cohérentes, φ_{f_3} est la restriction à $D(f_3)$ de φ_{f_2}, qui est nulle. Donc φ_{f_3} est nulle.

Cependant, si on se place dans le schéma $(D(f_1), \mathcal{O}_X|_{D(f_1)})$, $D(f_1)$, qui est un ouvert de X, est irréductible et donc $D(f_3)$ qui est un ouvert de $D(f_1)$ est dense dans $D(f_1)$. On considère alors $h = \varphi_{f_1}$, qui est telle que $h_{D(f_3)} = 0$. Or, $D(f_1)$, en tant que schéma affine, est quasi-compact. Par conséquent, d'après la proposition 1.7, h est nulle. ■

Remarque : Je pense qu'on pourrait utiliser les mêmes arguments mais agencés différemment pour montrer ce résultat.

Ceci achève la démonstration du théorème 1.10.

1.2.3 Commentaires

On a vu dans la dernière partie de la démonstration que :

Fait 1.14 *La limite projective d'anneaux intègres n'est pas intègre.*

Démonstration : Tout simplement, le produit de deux anneaux intègres n'est intègre que dans le cas très particulier où l'un des deux anneaux est nul. ■

Ce qui nous a sauvé ici, c'est des arguments topologiques.

D'où l'idée de généralisation :

Projet 1.15 *Soit $\mathcal{C}$ une (petite ?) catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ est irréductible (ou bien intègre ?) si pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to$ **Ann**, la limite projective*

$$\underset{U \in \mathcal{C}}{\underrightarrow{lim\ proj}}\, F(U)$$

est encore intègre.

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine irréductible réduit. Si on note $\mathcal{C}_X$ la catégorie des ouverts affines de X. Alors, on a montré que $\mathcal{C}_X$ est irréductible.

Question 1.16 *Est-ce que ce que je raconte est vrai ? Comment cela se généralise-t-il pour les schémas ? Et ailleurs ?*

[2]On dit que f est admissible si $D(f) \subset U$.