# L'idéal radical définissant un fermé d'un schéma affine est un invariant schématique

Colas Bardavid

dimanche 1er mai 2005

Pour une fois que je produis un document court !

## Résultats

**Proposition 0.1** *Soit $S$ un schéma affine. Soit $F$ un fermé de $S$, défini par $V(I)$, où $I$ est un idéal de fonctions globales. Alors :*

- *$F$ est aussi définie par $V(\sqrt{I})$ ;*
- *on a $\sqrt{I} = \{f \text{ fonction globale} \mid f(x) = 0\ \forall x \in F\}$.*

## Questions en suspens et travail à faire

**Fait à vérifier 0.2** *Si $S$ est un schéma et si $I$ est un idéal de fonctions globales, alors $V(I) = V(\sqrt{I})$.*

**Petit travail à faire 0.3** *Comprendre le comportement de $I_F$ lorsque le schéma n'est pas forcément affine. Cas particuliers : si $F$ est un fermé du type $V(I)$ ; si ce n'est pas un fermé du type $V(I)$.*

**Petit travail à faire 0.4** *Interpréter en termes intrinsèques $I_F$ lorsque $F = X \setminus U$ est le complémentaire d'un ouvert. (cas affine puis cas général).*

**Proposition 0.5** *Soit $S$ un schéma affine. Soit $F$ un fermé de $S$, défini par $V(I)$, où $I$ est un idéal de fonctions globales. Alors :*

- *$F$ est aussi définie par $V(\sqrt{I})$ ;*
- *on a $\sqrt{I} = \{f \text{ fonction globale} \mid f(x) = 0\, \forall x \in F\}$.*

**Démonstration :** Le premier point est ultra classique. Cela vient du fait que $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux premiers contenant $I$.

Le deuxième point est facile ; on note $A$ l'anneau des fonctions globales :

$$\begin{aligned} f \in \sqrt{I} \quad & \Longleftrightarrow \quad \forall \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A \text{ et } I \subset \mathfrak{P}, f \in \mathfrak{P} \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall x \in V(I), f(x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall x \in F, f(x) = 0 \end{aligned}$$

■

**Notation 0.6** *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma quelconque. Soit $F$ un ouvert de $X$. On note $I_F = \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid \forall x \in H,\ f(x) = 0\}$.*

**Fait à vérifier 0.7** *Si $S$ est un schéma et si $I$ est un idéal de fonctions globales, alors $V(I) = V(\sqrt{I})$.*

**Petit travail à faire 0.8** *Comprendre le comportement de $I_F$ lorsque le schéma n'est pas forcément affine. Cas particuliers : si $F$ est un fermé du type $V(I)$ ; si ce n'est pas un fermé du type $V(I)$.*

**Petit travail à faire 0.9** *Interpréter en termes intrinsèques $I_F$ lorsque $F = X \setminus U$ est le complémentaire d'un ouvert. (cas affine puis cas général).*