Lien entre Spec $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ et Spec $\mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n)$

Colas Bardavid

lundi 18 avril 2005

Table des matières

Résultats

Proposition 0.1 $\Psi : \begin{array}{rcl} \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \end{array}$ *est injective.*

Déception 0.2 $\Psi : \begin{array}{rcl} \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \end{array}$ *n'est pas surjective et* $\Phi : \begin{array}{rcl} \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & < \mathfrak{P} >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)} \end{array}$ *n'est pas injective.*

Questions en suspens et travail à faire

Projet 0.3 *Apprendre enfin ce qu'est le compactifié de Stone-Cech de* $\mathbf{R}^n$ *et le lien avec tout ça !*

Petit travail à faire 0.4 *Trouver un idéal premier de* $\mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *explicite qui contient une fonction partout non-nulle.*

Travail à faire 0.5 *Vérifier que c'est bien en l'infini qu'est le lieu de l'obstruction* $\operatorname{Spec} \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \not\twoheadrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $\mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n)$ la sous-algèbre de celles qui sont en plus bornées.

Introduction

Pourquoi ce texte ?

Il répond à un précédent texte, *Idéaux, idéaux premiers et idéaux maximaux de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ où j'étudie les idéaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. D'une part, on remarque qu'il semble que seules de fonctions bornées interviennent ; de plus, si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, alors, $\frac{f}{1+f^2} \in \mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Je présente ce travail à Antoine Chambert-Loir qui me dit de regarder si on n'aurait par hasard un isomorphisme (le sens reste à préciser : bijection, homémorphisme, isomorphisme d'espace annelé ?) entre Spec $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ et Spec $\mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

C'est ce que je fais ici.

1 Une flèche de Spec $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ vers Spec $\mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n)$

1.1 De façon générale

Si A est un sous-anneau de B, on a une flèche de Spec B vers Spec A :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}\ B & \to & \mathrm{Spec}\ A \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap A \end{array}.$$

En effet de façon encore plus générale, l'inclusion $i : A \hookrightarrow B$ peut être vue comme un morphisme d'anneaux et alors $i^{<-1>}(\mathfrak{P})$, dont on sait bien que c'est un idéal premier de A, est exactement $A \cap \mathfrak{P}$.

De façon générale, cette flèche n'est pas injective.

Contre-exemple 1.1 *Si on regarde l'inclusion d'anneaux $k \hookrightarrow k[X]$, la flèche correspondante entre les spectres envoie tous les idéaux non-pleins sur l'idéal nul de k.*

De façon générale, cette flèche n'est pas surjective.

Contre-exemple 1.2 *Si on regarde l'inclusion d'anneaux $\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{Q}$, la flèche correspondante entre les spectres envoie l'idéal nul sur l'idéal nul et l'idéal plein sur l'idéal plein, mais passe à côté de tous les idéaux $p\mathbf{Z}$ avec p premier.*

1.2 De façon particulière

On a la flèche :

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}\ \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \mathrm{Spec}\ \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \end{array}.$$

2 Une flèche de Spec $\mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n)$ vers Spec $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

2.1 De façon particulière

On regarde la flèche :

$$\Phi : \begin{array}{r} \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \to \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} \mapsto < \mathfrak{P} >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)} \end{array}.$$

où $< \mathfrak{P} >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)} = \{\sum_i \varphi_i f_i, f_i \in \mathfrak{P}$ et $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)\}$.

Il faut quand même vérifier que $< \mathfrak{P} >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)}$ est bien un idéal premier ! Soient donc $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que fg soit dans $< \mathfrak{P} >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)}$ et donc s'écrive $fg = \sum \varphi_i f_i$, avec des notations évidentes.

On a alors :

$$\frac{fg}{\left(1 + \sum_j \varphi_j^2 + f^2 + g^2\right)^2} = \sum_i \frac{\varphi_i}{\left(1 + \sum_j \varphi_j^2 + f^2 + g^2\right)^2} f_i.$$

D'abord, toutes les $\frac{\varphi_i}{\left(1+\sum_j \varphi_j^2+f^2+g^2\right)^2}$ sont bornées donc $\sum_i \frac{\varphi_i}{\left(1+\sum_j \varphi_j^2+f^2+g^2\right)^2} f_i$ est dans $\mathfrak{P}$.

Ensuite, $\frac{f}{1+\sum_j \varphi_j^2+f^2+g^2}$ et $\frac{g}{1+\sum_j \varphi_j^2+f^2+g^2}$ sont elles-aussi bornées. Grâce au caractère premier de $\mathfrak{P}$, on en déduit que l'une des deux est aussi dans $\mathfrak{P}$. En multipliant ensuite par $1+\sum_j \varphi_j^2+f^2+g^2$ (qui, elle, n'est pas forcément bornée), on obtient que f ou g est dans $< \mathfrak{P} >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)}$.

2.2 De façon générale

Si A est un sous-anneau de B et si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de A, on peut définir $< \mathfrak{P} >_B$ par $< \mathfrak{P} >_B = \{\sum_i b_i p_i, b_i \in B$ et $p_i \in \mathfrak{P}\}$.

Cependant, en général, ce n'est pas un idéal premier.

Contre-exemple 2.1 *On considère l'inclusion* $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ *et l'idéal* $(3) = 3\mathbf{Z}$ *qui est bien dans* Spec $\mathbf{Z}$*. Alors* $3\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ *n'est pas premier. En effet,* $\sqrt{3}\sqrt{3} = 3 \in 3\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ *mais* $\sqrt{3} \notin 3\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$.

3 Ψ et Φ sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

3.1 On a $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)}$

En effet, soit $\mathfrak{P} \in$ Spec $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Alors, $\Psi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \cap \mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathfrak{P}$ et donc $\Phi(\Psi(\mathfrak{P})) = < \mathfrak{P} \cap \mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n) >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)} \subset \mathfrak{P}$.

Réciproquement, si $f \in \mathfrak{P}$ alors, $\frac{f}{1+f^2} \in \mathfrak{P} \cap \mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $(1 + f^2)\frac{f}{1+f^2} \in < \mathfrak{P} \cap \mathcal{BC}^\infty(\mathbf{R}^n) >_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)}$: donc $f \in \Phi \circ \Psi(\mathfrak{P})$.

Conclusion : $\Phi \circ \Psi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$. Ce qu'on peut exprimer en disant :

Proposition 3.1 $\Psi : \begin{array}{rcl} \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \end{array}$ *est injective.*

Proposition 3.2 $\Phi : \begin{array}{rcl} \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & <\mathfrak{P}>_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)} \end{array}$ *est surjective.*

3.2 On n'a pas $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n)}$

En effet, soit $f \in \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction partout non-nulle et tendant vers 0 en $+\infty$ (en fait, il suffit que $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathbf{R}^n \mid 0 < f(x_\varepsilon) < \varepsilon$).

Alors, f n'est pas inversible dans $\mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n)$ car son inverse serait non-bornée. Mais, elle est inversible dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ (car non-nulle partout) !

Soit donc $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n)$ contenant (f). On $f \in <\mathfrak{M}>_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)}$ et donc $<\mathfrak{M}>_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)} = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Ce qu'on peut exprimer dans :

Déception 3.3 $\Psi : \begin{array}{rcl} \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \end{array}$ *n'est pas surjective et* $\Phi : \begin{array}{rcl} \text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) & \to & \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \mathfrak{P} & \mapsto & <\mathfrak{P}>_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)} \end{array}$ *n'est pas injective.*

3.3 Remarque sur le lieu de l'obstruction $\text{Spec } \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n) \not\to \text{Spec } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

C'est simplement pour dire que si $f \in \mathcal{CB}^\infty(\mathbf{R}^n)$ est une fonction partout non-nulle et telle que $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathbf{R}^n \mid 0 < f(x_\varepsilon) < \varepsilon$, alors, nécessairement, la suite des x_ε tend vers $+\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \forall M > 0, \exists x_{\varepsilon,M} \mid |x_{\varepsilon,M}| \geq M$ et $0 < f(x_{\varepsilon,M}) < \varepsilon$.

En effet, sinon on peut tous les mettre dans un compact, on en extrait une sous-suite convergente, qui converge vers x et on a alors $f(x) = 0$, pour le dire rapidement.