Normalisation d'un schéma

Colas Bardavid

mardi 21 juin 2005

On résout ici l'exercice II.3.8. de *Algebraic Geometry* de Hartshorne.

Il semble que ceci soit fait différemment, plus généralement (et mieux), dans EGA II.

Table des matières

Résultats

Questions en suspens et travail à faire

Question 1 *Géométriquement, qu'est-ce que la normalité ?*

Je suis content

Ahmed Abbès, dans son séminaire Bourbaki sur la conjecture de Bogomolov, utilise à en endroit la normalisation.

Je décide de regarder dans le Hartshorne ce que c'est. Il n'y a rien sauf un exercice. Hartshorne reste très évasif. J'ai envie de bien faire les choses et il va falloir faire un recollement...

Je vais voir chez Lang et chez Lafon (*Algèbre locale,...*). En exo, il y a que si A est intègre, A est intégralement clos si, et seulement si, pour tout $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A$, $A_{\mathfrak{P}}$ est intégralement clos. Je m'arrache les cheveux deux heures sur une broutille d'algèbre commutative. Mais finalement, je resouds ce dernier exercice.

Je continue ma journée dans la bibliothèque de l'IRMAR, pour essayer de recoller les normalisations des schémas affines. J'y arrive, je suis content.

Je m'en suis sorti par le formalisme des catégories, inspirés par la construction du produit que fait Grothendieck dans EGA.

1 Normalité et problème universel

1.1 Normalité

Définition 2 *Un schéma X est normal si pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et intégralement clos.*

On cherche à construire, pour tout schéma intègre X, un schéma normal $\widetilde{X}$ au-dessus de X qui soit universel pour la propriété d'être normal.

1.2 Problème universel

Plus formellement :

Soit X un schéma intègre.

Soit $\mathfrak{C}$ la catégorie dont les objets sont les schémas intègres, normaux au-dessus de X par un morphisme dominant, et dont les flèches sont les X-morphismes dominants.

$$\mathrm{ob}(\mathfrak{C}) = \left\{ \begin{array}{c} Z \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_Z} \\ X \end{array}, Z \in \mathbf{Sch} \text{ intègre et normal et } p_Z \text{ dominant} \right\}.$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}} \left(\begin{array}{c} Z \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X \end{array}, \begin{array}{c} Z' \\ \big\downarrow{\scriptstyle p'} \\ X \end{array} \right) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Z, Z') \mid f \text{ est dominant et } \begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd} \text{ commute} \right\}.$$

Tout simplement, on cherche un objet final dans la catégorie $\mathfrak{C}$.

C'est-à-dire, on cherche $\begin{array}{c}\widetilde{X}\\ \downarrow p\\ X\end{array}$, avec p dominant, tel que pour tout schéma intègre et normal Z, muni d'un d'un morphisme dominant $f : Z \to X$, il existe un unique $\tilde{f} : Z \to \widetilde{X}$ dominant tel que

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "\exists!\,\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

commute.

1.3 Unicité

Comme toute solution d'un problème universel on sait que, si elle existe, la normalisation $\begin{array}{c}\widetilde{X}\\ \downarrow p\\ X\end{array}$ est unique à un unique isomorphisme près.

2 Normalisation et sous-schéma ouvert

On va montrer que si on sait résoudre le problème pour X, on sait le résoudre pour tout ouvert $U \subsetneq X$.

Soit donc X un schéma intègre.

On suppose que X admet une normalisation $\begin{array}{c}\widetilde{X}\\ \downarrow p\\ X\end{array}$.

Alors,

Proposition 3 *Soit $U \subsetneq X$, non-vide. Alors,* $\begin{array}{c}p^{-1}(U)\\ \downarrow p\\ U\end{array}$ *est une normalisation de U.*

Démonstration : Tout d'abord, $p^{-1}(U)$ est bien intègre et normal.

Ensuite, vérifions que $\tilde{p} = p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ est bien dominant. Soit donc V un ouvert de U. En particulier V est un ouvert non-vide de X. Or, p est dominant. Donc, $p(X) \cap V \neq \varnothing$. Comme V est inclus dans U : $p(p^{-1}(U)) \cap V \neq \varnothing$.

Ensuite, soit $\begin{array}{c}Z\\ \downarrow f\\ U\end{array}$ un schéma intègre et normal au-dessus de X, avec f dominant.

Si on compose f avec l'inclusion $i : U \hookrightarrow X$,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[d, hook, "i"] \\ X \end{tikzcd}$$

on obtient encore un morphisme dominant.

En effet, soit V un ouvert non-vide de X. Comme X est intègre, il est en particulier irréductible et $V \cap U \neq \varnothing$. Donc $f(Z) \cap (U \cap V) \neq \varnothing$ et en particulier, $(i \circ f)(Z)$ est dense dans X.

On peut alors appliquer la propriété universelle : on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & \widetilde{X} \arrow[dd, "p"] \\ & U \arrow[dr, hook, "i"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

avec $\tilde{f}$ un morphisme dominant.

Or, pour tout $x \in Z$, $p(\tilde{f}(x)) = f(x) \in U$ et donc $\tilde{f}(x) \in p^{-1}(U)$. Donc, $\tilde{f}$ se factorise par l'inclusion $p^{-1}(U) \hookrightarrow \widetilde{X}$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & p^{-1}(U) \arrow[rr, hook] & & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ & U \arrow[rr, hook, "i"] & & X \end{tikzcd}$$

Finalement, on peut abréger ce diagramme en

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p"] \\ & U \end{tikzcd}$$

où la flèche $\tilde{f} : Z \to p^{-1}(U)$ est dominante car elle l'est déjà vers $\widetilde{X}$.

On a donc l'existence d'une factorisation.

Montrons maintenant qu'il y a unicité.

On suppose donc qu'on a deux flèches f_1 et f_2, dominantes vers $p^{-1}(U)$ qui fassent commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[dr, "f"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p"] \\ & U \end{tikzcd} .$$

Ces flèches font aussi commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[dr, "f"'] & p^{-1}(U) \arrow[r, hook, "j"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
& U \arrow[r, hook, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

et elles sont dominantes dans $\widetilde{X}$. Donc, $j \circ f_1$ et $j \circ f_2$ coïcident. Donc, $f_1 = f_2$.
■

3 Cas affine

Le cas affine est simple.

Proposition 4 *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma intègre. Alors, X admet une normalisation.*

On utilisera la proposition suivante, démontrée dans *Propriétés schématiques locales qu'on peut globaliser.*

Proposition 5 *Soit Z un schéma intègre et normal. Alors, $\mathcal{O}_Z(Z)$ est intégralement clos.*

Démonstration : (de la proposition 4)

A est intègre ; on note K sont corps de fractions et $i : A \hookrightarrow K$ l'injection canonique de A dans K.

Soit $\widetilde{A} \subset K$ la clôture intégrale de A dans K. Alors, $\widetilde{A}$ est intégralement clos (c'est une résultat d'algèbre commutative) et on sait alors que $\operatorname{Spec} \widetilde{A}$ est un schéma intègre et normal.

On note encore $i : A \hookrightarrow \widetilde{A}$, qui est encore une injection. On sait alors que le morphisme de schémas associé, $i^* : \widetilde{X} = \operatorname{Spec} \widetilde{A} \to \operatorname{Spec} A$ est dominant.

Montrons qu'il vérifie la propriété universelle. Soit Z un schéma intègre et normal muni d'une flèche $f : Z \to X$, qui est dominante. Comme

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Z, \operatorname{Spec} A) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A, \mathcal{O}_Z(Z)),$$

on va regarder plutôt dans les morphismes d'anneaux.

$f^* : A \to \mathcal{O}_Z(Z)$ est-il injectif ? Supposons que non et notons $I = \ker f^* \neq (0)$. Soit $P \in Z$ un point. Alors, l'image de P par f correspond à la préimage par f^* de l'idéal $\mathfrak{M}_P$ par $A \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_Z(Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,P}$. En particulier, pour tout point $P \in Z$, $I \subset f(P)$, c'est-à-dire que $f(P) \in V(I)$. Donc, $f(Z) \subset V(I)$; cependant, $(0) \in \operatorname{Spec} A$ car A est intègre et $(0) \notin V(I)$. Cela contredit le fait que f est dominant.

Donc $f^* : A \to \mathcal{O}_Z(Z)$ est injectif. Donc, f^* se prolonge aux corps des fractions ($\mathcal{O}_Z(Z)$ est bien intègre).

On cherche une factorisation par une application $Z \to \operatorname{Spec} \widetilde{X} = \operatorname{Spec} \widetilde{A}$. C'est équivalent à chercher une application $g : \widetilde{A} \to \mathcal{O}_Z(Z)$ qui factorise f^*. Cette factorisation est nécessairement déterminée par

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{g(x)}{g(y)} = \frac{f^*(x)}{f^*(y)}.$$

Il reste à voir qu'elle existe.

Voici un dessin :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[dd, hook] \\
\widetilde{A} \arrow[ur, dashed, "\exists ? g"'] \arrow[d, hook] & \\
K \arrow[r, "\widetilde{f^*}"'] & \operatorname{Frac} \mathcal{O}_Z(Z)
\end{tikzcd} .$$

Soit donc $x \in \widetilde{A}$. A-t-on $\widetilde{f^*}(x) \in \mathcal{O}_Z(Z)$? Oui ! En effet, $\widetilde{f^*}(x)$ est entier au-dessus de $\mathcal{O}_Z(Z)$ (il suffit de l'écrire) et $\mathcal{O}_Z(Z)$ est intégralement clos, comme on l'a rappelé avant de commencer la démonstration.

C'est bon ! On a l'existence et l'unicité. ∎

4 Cas général

4.1 Recollement

On part de X un schéma intègre. Il est recouvert par des ouverts affines. L'idée, c'est de normaliser ces ouverts affines et de recoller les normalisations.

Pour faire cela, on doit vérifier que les conditions de recollement sont satisfaites. Le processus général de recollement est établi dans [Chevalley] (et c'est très bien fait).

On dispose donc d'une famille de schémas X_U, indexée par la famille des ouverts affines de X. Plus précisément, on a pour tout ouvert U affine de X un schéma X_U intègre et normal muni d'un morphisme $\begin{array}{c} X_U \\ \downarrow{\scriptstyle p_U} \\ U \end{array}$ qui est dominant.

Soient maintenant U et V deux ouverts affines de X.

On note $\Omega_V(U) \hookrightarrow X_U$ l'ouvert ${p_U}^{-1}(U \cap V)$ de X_U. On a vu dans la partie 2 que $\begin{array}{c} \Omega_V(U) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{U,V}} \\ U \cap V \end{array}$ est une normalisation de $U \cap V$. Il en est évidemment de même pour $\begin{array}{c} \Omega_U(V) \\ \big\downarrow {\scriptstyle p_{V,U}} \\ U \cap V \end{array}$. Ainsi, d'après l'unicité (à unique isomorphisme près), il existe un morphisme $\varphi_{U,V} : \Omega_V(U) \to \Omega_U(V)$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Omega_V(U) \arrow[rr, "\varphi_{U,V}"] \arrow[dr, "p_{U,V}"] & & \Omega_U(V) \arrow[dl, "p_{V,U}"] \\ & U \cap V & \end{tikzcd} .$$

Pour qu'on puisse recoller, il faut vérifier les *conditions de recollement*. D'abord, on doit vérifier que $\varphi_{U,V}(\Omega_V(U) \cap \Omega_W(U)) \subset \Omega_U(V) \cap \Omega_W(V)$. Soit donc $x \in \Omega_V(U) \cap \Omega_W(U)$. Cela veut dire que $p_U(x) \in U \cap W$. On a $p_V(\varphi_{U,V}(x)) = p_U(x)$. Donc, $\varphi_{U,V}(x) \in \Omega_W(V)$.

Ensuite, on doit vérifier que sur cette intersection $\varphi_{U,W}$ et $\varphi_{V,W} \circ \varphi_{U,V}$ coïncident. En fait, $\Omega_V(U) \cap \Omega_W(U)$, c'est $\Omega_{V \cap W}(U)$.

Références

[Chevalley] Claude Chevalley, *Introduction à la théorie des schémas*