Complété profini d'un groupe et groupes profinis : cas abstrait, cas topologique

Colas Bardavid*
IRMAR — UMR 6625 du CNRS
Université de Rennes 1 Campus de Beaulieu
35042 Rennes CEDEX FRANCE

janvier 2007

Cher lecteur,

Jusqu'à il y a quelques jours, où Xavier (Caruso) nous les a expliqués à Viviana (Delanoy) et moi, j'ose avouer que les concepts de *groupe profini* et de *complété profini* $\widehat{G}$ d'un groupe G restaient pour moi quelque peu obscurs et malheureusement me faisaient un peu peur.

Depuis, les choses sont beaucoup plus claires !

L'intention de ce texte, au-delà des détails et précisions techniques[1], est *simplement* de partager avec toi, lecteur, cette compréhension. Ainsi, dans la lignée du très bel article [BG01] de José I. Burgos de Gil, *Una introducció a la teoria d'Arakelov*, j'accorderai un effort particulier pour te donner des explications qui ne vont pas trop vite et qui sont parlantes. N'hésite pas à m'écrire par email si tu as des remarques.

Enfin, je profite de l'occasion pour remercier Xavier (Caruso) ainsi que tous ceux qui aiment offrir leurs secrets mathématiques.

---

* colas.bardavid@gmail.com
[1] qui d'ailleurs sont largement laissés en suspens.

(1) Humanité et partitions.

Considérons l'ensemble $\mathcal{H}$ des êtres humains[2]. On peut munir cet ensemble $\mathcal{H}$ de multiples *partitions* ou, de manière équivalente de multiples *relations d'équivalence*. Par exemple, on peut écrire :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^h \sqcup \mathcal{H}^f$$

où $\mathcal{H}^h$ désigne l'ensemble des hommes et $\mathcal{H}^f$ l'ensemble des femmes. De même, on peut aussi écrire :

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{n=1850}^{2008} \mathcal{H}_n,$$

où $\mathcal{H}_n$ est l'ensemble des personnes qui sont nées en l'année n. On pourrait continuer en découpant l'humanité selon la taille, le poids, la couleur de la peau (blanche, noire, jaune ou « rouge »), le pays d'origine, la couleur des yeux, le nombre d'articles publiés ou tout autre critère *fini*...

Par *critère fini*, j'entends toute relation d'équivalence qui définit sur $\mathcal{H}$ un nombre fini de classes d'équivalence.

(1.1) « Extension universelle » de l'humanité et partitions finies. Arrivé à ce stade, il faut modifier légèrement nos données si l'on veut éviter les cas triviaux. En effet, le problème de l'ensemble $\mathcal{H}$ est qu'il est fini : en particulier, la relation d'égalité ou, de façon équivalente, la partition triviale

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{H}} \{x\}$$

sont *finies*, ce qu'on veut en fait exclure[3].

On introduit donc un nouvel ensemble, *cette fois-ci infini*, qu'on note $\widetilde{\mathcal{H}}$: l'ensemble de tous les êtres humains possibles et imaginables. De même, on peut alors s'intéresser aux relations d'équivalence sur $\widetilde{\mathcal{H}}$ définissant un nombre *fini* de classes d'équivalence. Les exemple précédents sont toujours valables, on peut encore parler du sexe, de l'âge, de la taille ou du poids d'un être humain « imaginaire ».

On appelle *Humanité* cet ensemble $\widetilde{\mathcal{H}}$.

[2] $\mathcal{H}$ comme humanité.

[3] Tout cela sera normalement beaucoup plus clair à la fin...

(1.2) Définitions et notations. *On s'intéresse à l'Humanité* $\widetilde{\mathcal{H}}$.

On appelle critère de classement fini *sur* $\widetilde{\mathcal{H}}$ *toute relation d'équivalence* v *qui définit sur* $\widetilde{\mathcal{H}}$ *une partition finie. On note* $C_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ *l'ensemble des critères de classement finis sur* $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Si v *est un critère de classement fini sur* $\widetilde{\mathcal{H}}$*, on note*

$$\pi_v : \widetilde{\mathcal{H}} \to E_v(\widetilde{\mathcal{H}}) := \widetilde{\mathcal{H}}/v$$

la projection canonique et si $x \in \widetilde{\mathcal{H}}$ *est un être humain, on appelle* $\pi_v(x)$ *l'*approximation finie de x selon le critère v.

Évidemment, toutes ces définitions sont valables pour n'importe quel ensemble X.

(1.3) Exemple de l'âge. *On note* age *la relation d'équivalence définie sur* $\widetilde{\mathcal{H}}$ *par*

$$\forall x, y \in \widetilde{\mathcal{H}} \quad age(x,y) = \textit{oui} \iff x \textit{ et } y \textit{ sont nés la même année}.$$

On peut représenter l'ensemble quotient par $E_{age}(\widetilde{\mathcal{H}}) = \{0 \textit{ an}, 1 \textit{ an}, 2 \textit{ ans}, 3 \textit{ ans}, ..., 150 \textit{ ans}\}$. *Enfin, si* $x \in \widetilde{\mathcal{H}}$*, on appelle âge de* x *son approximation finie* $\pi_{age}(x)$ *selon le critère* age.

(1.4) Image profinie d'un être humain. Nous voilà maintenant outillés pour aborder la notion de « *profini* ».

Si $x \in \widetilde{\mathcal{H}}$ est un être humain, on appelle *image profinie de* x et on note $\widehat{\pi}(x)$ la famille de ses approximations selon tous les critères de classement finis :

$$\widehat{\pi}(x) = (\pi_v(x))_{v \in C_{\widetilde{\mathcal{H}}}}.$$

Autrement dit, on dispose d'une flèche

$$\widehat{\pi} : \widetilde{\mathcal{H}} \to \prod_{v \in C_{\widetilde{\mathcal{H}}}} E_v(\widetilde{\mathcal{H}})$$

qu'on appelle la *projection profinie*.

Intuitivement, l'image profinie $\widehat{\pi}(x)$ de x est le rassemblement de toutes les informations que l'on peut avoir sur x à travers des critères finis.

(1.5) Une question naturelle. Une première question que l'on peut se poser est : quelle information est en fait contenue dans l'image profinie de x ? Somme toute, peut-on « recomposer » x à partir de son image profinie $\widehat{\pi}(x)$? Ou, en reformulant : la flèche $\widehat{\pi}$ est-elle injective ?

Sans rentrer dans les détails, intuitivement[4] la réponse en général à cette question est non. On verra des exemples plus loin, dans le cas des groupes.

(1.6) Une autre question naturelle. Une seconde question plus subtile mais tout autant naturelle est la suivante. Peut-on imaginer une collection de données $(x_v)_{v \in C_{\widetilde{\mathcal{H}}}}$ « compatible » qui ne provienne d'aucun élément ? (Par compatible, j'entends que, par exemple, si la classe selon le critère « *âge* » est « 18 ans », alors on *doit* avoir que la classe selon le critère « *moins de 20 ans* » est « oui ».)

Par exemple : existe-t-il un être humain (potentiel) qui s'appelle Quentin Mercier, qui a les yeux verts et les cheveux châtains, mesure 1m85, a 24 ans, est sociologue, etc. ? En d'autres termes, le morphisme $\widehat{\pi}$ est-il surjectif dans les collections compatibles de données finies ?

Dans le cas de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{H}}$, le fait d'avoir pris tous les êtres humains *possibles* nous assure en fait que la flèche $\widehat{\pi}$ va être surjective. Mais, si on avait gardé l'ensemble $\mathcal{H}$ et si, au lieu de regarder touts les critères finis, on avait choisi un certain sous-ensemble[5] de $C_{\widetilde{\mathcal{H}}}$, on aurait alors obtenu une flèche $\widehat{\pi}$ non-surjective. Et, d'une certaine façon, l'ensemble d'arrivée de $\widehat{\pi}$ aurait été l'ensemble $\widetilde{\mathcal{H}}$ des tous les êtres humains possibles et imaginables.

---

(2) Complété profini d'un groupe.

Autant la partie précédente n'avait-elle peut-être pas de pertinence mathématique mais cherchait avant tout à faire comprendre la vraie nature des concepts, autant dans cette partie les objets mathématiques introduits seront clairement non-triviaux et seront étudiés plus techniquement.

(2.1) Complété profini. Soit G un groupe. Si H est un sous-groupe distingué de G d'indice fini, c'est-à-dire si le groupe G/H des classes à gauche de G modulo H est fini, ce qu'on note $H \triangleleft_f G$, on dira que :

- H est un *critère d'approximation finie* de G ;
- G/H est le *groupe des approchés finis de G selon* H ;
- $\pi_H : G \to G/H$ est l'*approximation finie selon* H ;
- si $g \in G$, $\pi_H(g)$ est l'*image approchée finie de* g *selon* H.

[4] penser par exemple à deux points « non-séparés » d'un espace topologique : un objet ne peut pas être « caractérisé » par ses propriétés ; néanmoins, dans le contexte technique des ensembles et des relations d'équivalence finies, la réponse est *oui* ! En fait, au lieu de choisir *toutes* les classes d'équivalences finies, on pourrait faire la même construction en ne considérant qu'une classe de partitions finies ; la réponse ne serait alors pas nécessairement positive.

[5] qui, en particulier, ne contienne pas la relation d'égalité.

Ainsi, au lieu de considérer, comme dans le cas des ensembles, toutes les partitions finies de G, on se limite aux partitions finies « compatibles » à la structure de groupe de G.

Dès lors, on peut définir le *complété profini* $\widehat{G}$ comme l'ensemble des familles compatibles d'approchés finis selon tous les critères d'approximation finie $H \lhd_f G$.

(2.2) Compatibilité. Voilà ce qu'on entend par compatible. Si $H_1, H_2 \lhd_f G$ sont deux critères d'approximation finie et qu'en plus $H_1 \subset H_2$, on dispose naturellement d'une flèche $\tilde{\pi}_{H_1 \to H_2}$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi_{H_1}"] \arrow[dr, "\pi_{H_2}"'] & G/H_1 \arrow[d, "\tilde{\pi}_{H_1\to H_2}"] \\ & G/H_2 \end{tikzcd} .$$

On demande donc, naturellement, qu'étant données deux approchés finis $g_{H_1} \in G/H_1$ et $g_{H_2} \in G/H_1$, ils vérifient :

$$\tilde{\pi}_{H_1 \to H_2}(g_{H_1}) = g_{H_2}.$$

Plus formellement :

(2.3) Définition. *Soit G un groupe. Le* complété profini *de G, noté $\widehat{G}$ est :*

$$\widehat{G} = \left\{ (x_H)_{H \lhd_f G} \mid H_1 \subset H_2 \Rightarrow \tilde{\pi}_{H_1 \to H_2}(x_{H_1}) = x_{H_2} \right\} \subset \prod_{H \lhd_f G} G/H.$$

Il est naturellement muni d'une structure de groupe ainsi que d'un morphisme

$$\widehat{\pi} : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \widehat{G} \\ g & \longmapsto & (\pi_H(g))_{H \lhd_f G} \end{array}$$

qu'on appelle projection profinie.

(2.4) Complété profini 2 : version plus abstraite. On peut reprendre ce qui précède d'un point de vue équivalent, plus abstrait, mais aussi plus intrinsèque.

Soit G un groupe. On appelle *approximation finie de G* tout couple $\mathbf{v} = (F_{\mathbf{v}}, \varphi_{\mathbf{v}})$ où $F_{\mathbf{v}}$ est un groupe fini et $\varphi_{\mathbf{v}} : G \to F_{\mathbf{v}}$ un morphisme de groupes[6]. Si $g \in G$, on appelle *approximation finie de g selon* $\mathbf{v}$ l'image $\varphi_{\mathbf{v}}(g) \in F_{\mathbf{v}}$.

(2.5) Exemples variés et divers d'approximations finies. Voici un certain nombre d'exemples, choisis en combinatoire, géométrie, arithmétique, topologie, etc. qui j'espère convaincront le lecteur de la pertinence de ce terme, « approximation finie ».

a) $\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \\ x & \longmapsto & \mathrm{sgn}(x) \end{array}$, le morphisme « signe d'un nombre réel ».

[6] On pourra abuser les notations en écrivant φ au lieu (F, φ).

b) Dans le même style, $\begin{array}{rcl} O_3(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}$ qui à M associe le sens (« direct » ou « indirect ») de l'application orthogonale M ; plus généralement, on peut définir un tel morphisme pour $O_n(\mathbf{R})$ et pour $GL_n(\mathbf{R})$.

c) La fonction « parité » $\begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \\ x & \longmapsto & [x]_2 \end{array}$ et, plus généralement, les fonctions « reste modulo n ».

d) Plus généralement, si p est un nombre premier, on peut encore réduire modulo p certains éléments de $\mathbf{Q}$, c'est $(\mathbf{Z}_{(p)}, +) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

e) Similairement, on peut par exemple considérer la trace modulo p^n pour les matrices à entrées entières p-adiques : $\begin{array}{rcl} (M_n(\mathbf{Z}_p), +) & \longrightarrow & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ A & \longmapsto & [\operatorname{tr} A]_{p^n} \end{array}$.

f) On peut approximer des séries en ne gardant que les premiers termes ; c'est

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}[[t]] & \longrightarrow & (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\,[t]/(t^{n+1}) \\ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \cdots & \longmapsto & ([a_0]_p + [a_1]_p t + \cdots + [a_n] t^n) \bmod t^{n+1} \end{array} .$$

g) Le déterminant modulo p : $\begin{array}{rcl} GL_n(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\star \\ A & \longmapsto & [\det A]_p \end{array}$. Plus généralement, si $K/\mathbf{Q}$ est un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{P}$ un idéal premier non-nul de $\mathcal{O}_K$, on définit de la même façon $GL_n(\mathcal{O}_K) \to (\mathcal{O}_K/\mathfrak{P})^\star$

h) Si G/k est un groupe algébrique et si K/k est une extension de corps, le morphisme d'approximation dans le groupe des composantes connexes, $G(K) \to G/G^\circ$, qui à x associe sa composante connexe.

i) Dans le même esprit, si X est un espace topologique et que $|\pi_0(X)| < \infty$, on peut considérer $\begin{array}{rcl} \operatorname{Aut}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{\pi_0(X)} \\ \phi & \longmapsto & \pi_0(\phi) \end{array}$ qui à un automorphisme associe la permutation des composantes connexes qu'il induit.

j) Si on note $\mathfrak{S}_{(\mathbf{N})} = \varinjlim_n \mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\mathbf{N}$ à support fini, on dispose encore d'une signature : $\mathfrak{S}_{(\mathbf{N})} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

k) Si $K/\mathbf{Q}$ est un extension galoisienne, la trace d'un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur K est une approximation finie : $\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_K \end{array}$. Ceci se généralise pour un corps quelconque k et son groupe de Galois absolu, $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

(2.6) Morphismes. Si $\mathbf{v}_1 = (F_{\mathbf{v}_1}, \varphi_{\mathbf{v}_1})$ et $\mathbf{v}_2 = (F_{\mathbf{v}_2}, \varphi_{\mathbf{v}_2})$ sont deux approximations finies de G, on dira $\mathbf{v}_2$ se factorise à travers $\mathbf{v}_1$ s'il existe un morphisme ψ qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & F_{\mathbf{v}_1} \arrow[dd, "\psi"] \\ G \arrow[ur, "\varphi_{\mathbf{v}_1}"] \arrow[dr, "\varphi_{\mathbf{v}_2}"'] & \\ & F_{\mathbf{v}_2} \end{tikzcd} .$$

Les tels $\psi : \mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_2$ constituent les morphismes $\mathrm{Hom}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. On obtient ainsi une catégorie, qu'on appelle *catégorie des approximations finies de* G et qu'on note $\mathbf{App}_f(G)$.

On peut alors écrire (en faisant fi de tous les problèmes de théorie des ensembles qui se posent lorsqu'on écrit $v \in \mathbf{App}_f(G)$...) :

(2.7) Définition. *Soit G un groupe. On définit le* complété profini $\widehat{G}$ *de G par*

$$\widehat{G} = \left\{ (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_f(G)} \in \prod_{\mathbf{v}} F_{\mathbf{v}} \mid \forall \psi : \mathbf{v} \to \mathbf{w},\ \psi(x_{\mathbf{v}}) = x_{\mathbf{w}} \right\}.$$

Il est naturellement muni d'un structure de groupe ainsi que d'un morphisme

$$\widehat{\pi} : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \widehat{G} \\ g & \longmapsto & (\varphi_{\mathbf{v}}(g))_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_f(G)} \end{array}$$

qu'on appelle projection profinie.

(2.8) Philosophie du complété profini. Si G est un groupe et si $g \in G$, moralement, la projection profinie $\widehat{\pi}(g)$ de g est tout ce qu'on connaît de g par approximation finie. Par ailleurs, un élément du complété profini est une famille cohérente d'approximations finies mais qui ne provient pas forcément d'un élément de G.

Ainsi, le complété profini de G à la fois oublie certaines subtilités du groupe G, celles qui ne sont pas « touchables » par approximation finie, mais en même temps recompose des éléments qui étaient « inaccessibles ».

On comprend dès lors bien qu'un groupe G tel que l'opération de complétion profinie à la fois ne passe à côté d'aucune subtilité mais en plus ne recrée pas de nouvel élément[7] est un groupe intéressant. C'est un groupe qui en un sens est complet et ne contient pas de subtilités indécelables « finiment ».

En fait, comme on le verra plus loin, les choses ne se passent pas aussi bien que ce que l'on espérait : le fait que $\widehat{\pi}$ soit un isomorphisme ne caractérise pas ce qu'on appellera les groupes profinis. Pour que cette caractérisation soit vraie, il faudra élargir un peu notre point de vue.

En attendant, voici une illustration de cette philosophie profinie, dont la démonstration, facile, est laissée au lecteur :

(2.9) Proposition. *Soit G un groupe. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\pi} \text{ est injectif} & \iff & \forall g \neq h \in G,\ \text{« on peut déceler la différence entre } g \text{ et } h \\ & & \qquad\qquad \text{dans une approximation finie »} \\ & \iff & \forall g \in G \backslash \{1\},\ \text{« on peut déceler la non-trivialité de } g \\ & & \qquad\qquad \text{dans une approximation finie »} \\ & \iff & \forall g \in G \backslash \{1\},\ \exists \mathbf{v} \in \mathbf{App}_f(G) \mid \varphi_{\mathbf{v}}(g) \neq 1 \end{array}$$

On dit dans ce cas que G est *résiduellement fini*.

[7] c'est-à-dire un groupe tel que $\widehat{\pi}$ est un isomorphisme.

(3) L'exemple du complété profini de Q.

Lors de l'introduction sur la complétion profinie, on a vu qu'une question naturelle était de décider de l'injectivité de $X \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{X}$ pour un « espace » X. On montre ici que dans le cas du groupe additif $(\mathbf{Q}, +)$, la flèche $\widehat{\pi}$ n'est pas injective.

(3.1) Proposition. $\widehat{\mathbf{Q}}$ *est le groupe nul.*

Démonstration : On va montrer, plus précisément, que $\mathbf{Q}$ (sous-entendu additif) ne possède pas d'approximation finie non-triviale : toute flèche $\mathbf{Q} \xrightarrow{\varphi} F$ vers un groupe fini se factorise par la flèche nulle. On note N l'ordre de F, de sorte que $\forall z \in F, z^N = e$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{Q}$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(N \cdot \frac{x}{N}\right) \\ &= \varphi\left(\underbrace{\frac{x}{N} + \cdots + \frac{x}{N}}_{N \text{ fois}}\right) \\ &= \left(\varphi\left(\frac{x}{N}\right)\right)^N \\ &= e. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que la flèche est nulle. ■

(4) Groupes profinis.

Au moment où j'écris ces lignes, la seule définition d'un groupe profini que j'ai jamais vue ou entendue est qu'un groupe profini est la limite projective de groupes finis. Personnellement, cette définition ne me satisfait pas et me laisse un peu pantois... En revanche, suivant la philosophie du complété profini décrite ci-dessus, demander qu'un groupe G soit tel que la flèche

$$\widehat{\pi} : G \to \widehat{G}$$

soit un isomorphisme me semble plus naturel et surtout *plus intuitif* : c'est à la fois un groupe qu'on peut recomposer par ses approximations finies et qui est « complet » dans le sens où toutes les suites compatibles d'approximations finies donnent naissance à un vrai élément. Contrairement à ce qu'on pourrait espérer, les deux notions de coïncident pas... Il existe des groupes profinis tels que $\widehat{\pi} : G \to \widehat{G}$ ne soit pas un isomorphisme. Plus précisément, vu qu'un groupe profini est toujours résiduellement fini, tel que $\widehat{\pi}$ ne soit pas surjectif.

Néanmoins, que le lecteur, déçu, ne laisse pas tomber de ses mains ce texte ! ! En effet, on verra qu'avec quelques modifications, tout s'arrangera pour le mieux ! Restez donc encore un peu pour les prochains épisodes !

(4.1) Groupes profinis. La définition qu'on trouve partout est :

(4.2) Définition. *Un groupe G est profini s'il est isomorphe à la limite projective $\varprojlim G_i$ des groupes* finis G_i.

Plus précisément, on se donne une famille de groupes $(G_i)_i$ et pour tout couple d'indices (i,j) un ensemble de morphismes entre G_i et G_j qu'on notera $\{\varphi_{ij}\}$. La limite profinie G est alors munie de projections p_i qui vérifient :

$$\begin{tikzcd} & G_i \arrow[dd, "\{\varphi_{ij}\}"] \\ G \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\ & G_j \end{tikzcd}$$

et est universelle pour cette propriété. Plus concrètement, on sait qu'on peut alors décrire G par

$$G = \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_i G_i \mid \forall i,j \quad \forall \varphi_{ij} \quad \varphi_{ij}(g_i) = g_j \right\}$$

muni des projections évidentes. En particulier, on note H_i le noyau des p_i. On peut décrire $H_i = \{(g_j)_{j\in I} \mid (\cdots)$ et $g_i = 1\}$. On note $\mathbf{v}_i = (G_i, p_i)$ les approximations finies données par les projections.

On peut déjà remarquer, d'après les définitions, que si G est un groupe, alors $\widehat{G}$ est toujours un groupe profini.

(4.3) Groupes fortement complets. En fait, les groupes G tels que $\hat{\pi}$ est un isomorphisme sont appelés groupes *fortement complets*. Facilement, un groupe fortement complet est nécessairement profini. Comme annoncé, malheureusement, la réciproque est fausse : le groupe additif $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, par exemple, est profini sans être fortement complet. La démonstration de ce résultat est l'objet de la partie **(8)**.

Récemment (en 2003), Nikolay Nikolov et Dan Segal ont démontré, dans les deux papiers [NS07a] et [NS07b], qu'un groupe profini topologiquement de type fini (pour la topologie profinie) est toujours fortement complet ! ! Leur démonstration fait plus de 100 pages et utilise la classification des groupes finis simples.

---

(5) Groupes profinis 2 : l'approche topologique.

Dans cette partie, on va reprendre ce qui a été fait dans les parties **(2)** et **(4)** mais cette fois-ci dans le cadre topologique. Cette approche sera justifiée *a posteriori*, puisque, dans ce cadre, la caractérisation attendue des groupes profinis est vraie.

(5.1) Complété profini topologique. Soit G un groupe topologique. Nous inspirant de ce qui a été fait précédemment, on définit naturellement les approximations finies discrètes. On appelle *approximation finie discrète de G* tout couple $\mathbf{v} = (F, \varphi)$, où F est un groupe fini discret et où

$\varphi : G \to F$ est un morphisme de groupes *topologiques* (*ie* que φ est continu, *ie* que son noyau est ouvert). On a la même notion de morphisme entre approximations que précédemment. On note $\mathbf{App}_{discr}(G)$ la catégorie des approximations finies discrètes de G.

On pose alors :

$$\widehat{G}^{top} = \left\{ (g_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathbf{App_{discr}(G)}} \in \prod_{\mathbf{v}} F_{\mathbf{v}} \mid \forall \psi : \mathbf{v} \to \mathbf{w},\ \psi(x_{\mathbf{v}}) = x_{\mathbf{w}} \right\}.$$

On munit $\prod_{\mathbf{v}} F_{\mathbf{v}}$ de la topologie produit et $\widehat{G}^{top} \subset \prod_{\mathbf{v}} F_{\mathbf{v}}$ de la topologie induite. Dans ce cas, on peut caractériser facilement les ouverts de $\widehat{G}^{top}$:

(5.2) Fait. *Les ouverts de $\widehat{G}^{top}$ sont tous de la forme*

$$U = \left(E \times \prod_{i \notin \{i_1, \cdots, i_n\}} F_i \right) \cap \widehat{G}^{top}$$

où E est un sous-ensemble quelconque de $F_{i_1} \times \cdots \times F_{i_n}$.

On dispose, comme tout à l'heure, d'une projection profinie topologique naturelle

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\pi}^{top} : & G & \longrightarrow & \widehat{G}^{top} \\ & g & \longmapsto & (\varphi_{\mathbf{v}}(g))_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_{discr}(G)} \end{array}$$

dont on démontre facilement qu'elle est continue.

(5.3) Étude topologique rapide de $\widehat{G}^{top}$. Commençons d'abord par un cas particulier.

(5.4) Proposition. *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles finis discrets. Alors, $F = \prod_i F_i$ est compact et totalement discontinu.*

Démonstration : La compacité est une conséquence directe du théorème de Tychonoff. Montrons que F est totalement discontinu. Soit $x \in F$. Supposons que la composante connexe C de x dans F contienne au moins deux éléments $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ et $\mathbf{g}$. Il existe un indice i_0 tel que f_{i_0} et g_{i_0} sont distincts, dans F_{i_0}. On peut donc considérer :

$$\begin{array}{rcl} U & = & \prod_{i \neq i_0} F_i \times \{f_{i_0}\} \\ V & = & \prod_{i \neq i_0} F_i \times (F_{i_0} \backslash \{f_{i_0}\}) \end{array}$$

qui en fait dont tous les deux ouverts et tels que :
- $U \cap V = \varnothing$
- $U \cup V = F$.

Il en est donc de même pour $C \cap U$ et $C \cap V$, qui par ailleurs ne sont pas vides. Cela signifie que C n'est pas connexe. Donc, la composante connexe de x est $\{x\}$: F est totalement discontinu. ■

(5.5) Corollaire. *Toute limite projective de groupes finis discrets est compacte et totalement discontinue. En particulier, cela vaut pour $\widehat{G}^{top}$ si G est un groupe topologique .*

Démonstration : On considère un système projectif $(F_i)_{i\in I}$ de groupes finis discrets. La limite projective $F = \varprojlim_{i\in I} F_i$ peut être décrite par[8]

$$F = \left\{ (f_i)_{i\in I} \in \prod_i F_i \mid \forall i,j \quad \forall \varphi_{ij} \quad \varphi_{ij}(f_i) = f_j \right\} \subset \prod_i F_i.$$

On va montrer que F est fermé dans $\prod_i F_i$, ce qui suffira à conclure ; on montre que le complémentaire est ouvert. Soit $(f_i)_{i\in I} \notin F$: cela signifie qu'il existe i_0, j_0 et φ_{i_0,j_0} tels que $\varphi_{i_0,j_0}(f_{i_0}) \neq f_{j_0}$. On vérifie alors que l'ouvert

$$U = \prod_{i\notin\{i_0,j_0\}} F_i \times \{g_{i_0}\} \times \{g_{j_0}\}$$

est disjoint de F et contient $(f_i)_{i\in I}$. ■

(5.6) Comparaison des complétés profinis « abstrait » et topologique. Lorsqu'on étudie un groupe topologique G, on a toujours la possibilité, dans un premier temps, de le considérer de façon abstraite, c'est-à-dire de ne pas tenir compte de sa structure topologique. Plus formellement, si on note

$$\omega : \mathbf{GrTop} \to \mathbf{Gr}$$

le foncteur oubli, cela revient, dans l'étude de G à ne considérer que $\omega(G)$. Pour alléger les notations, on notera

$$G^\omega := \omega(G).$$

Si on se place de ce point de vue-là, une approximation finie discrète, lorsqu'on oublie les structures topologiques, fournit toujours une approximation finie. Ainsi, on a plus d'approximations finies de G^ω que d'approximations finies discrètes de G. Plus formellement, l'application d'oubli

$$\omega : \mathbf{App}_{discr}(G) \to \mathbf{App}_f\left(G^\omega\right)$$

est injective. Cette comparaison entre les approximations nous donne, dualement, comme on le verra plus loin, une comparaison entre $\widehat{G}^{top}$ et $\widehat{G^\omega}$. Avant d'essayer de démontrer notre caractérisation des groupes profinis (topologiques), on peut répondre à la question suivante : étant donné cette comparaison entre $\widehat{G}^{top}$ et $\widehat{G^\omega}$, le fait que la caractérisation des groupes profinis est fausse pour $\widehat{G^\omega}$ est-elle une obstruction à ce qu'elle soit fausse pour $\widehat{G}^{top}$?

(5.7) Cas particuliers des groupes discrets et des groupes grossiers. Avant d'aborder le cas général, voyons ce qui se passe dans ces deux cas. Ces cas-là sont intéressants à double titre : eux-mêmes d'abord mais aussi car si l'on part d'un groupe G abstrait, on a deux façons d'en faire un groupe topologique, à savoir le munir des topologies discrètes ou grossières.

D'abord, si le groupe étudié G est un groupe discret (pas forcément fini) alors tout morphisme de groupes (abstraits) $\varphi : G^\omega \to F$ vers un groupe fini se relève en un morphisme entre groupes topologiques discrets. Cela signifie qu'on a $\mathbf{App}_{discr}(G) = \mathbf{App}_f\left(G^\omega\right)$. On a donc égalité aussi entre les deux complétés profinis.

Passons maintenant au cas grossier. De façon générale, si $\varphi : G \to F$ est un morphisme continu vers un groupe discret alors, comme le neutre de F forme un ouvert, $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est un ouvert de G. C'est la raison pour laquelle tout morphisme d'un groupe grossier dans un groupe discret est nul. Ainsi, le complété profini topologique est nul.

On peut synthétiser ceci en :

(5.8) Proposition. *Soit G un groupe abstrait :*

[8]En termes savants, cela signifie que les limites projectives commutent au foncteur oubli $\omega : \mathbf{GrTop} \to \mathbf{Gr}$.

- *si on munit G de la topologie discrète, alors* $\left(\widehat{G}^{top}\right)^{\omega} \simeq \widehat{G^{\omega}}$
- *si on munit G de la topologie grossière, alors* $\widehat{G}^{top} = \{0\}$.

(5.9) Cas général. On a vu qu'on a une application injective $\omega : \mathbf{App}_{discr}(G) \to \mathbf{App}_f\,(G^{\omega})$. Pour alléger les notations, si $\mathbf{v}$ est une approximation finie discrète, on note $\mathbf{v}^{\omega}$ l'approximation finie déduite par oubli. On construit ainsi le morphisme de « comparaison » :

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\omega} : & \widehat{G^{\omega}} & \longrightarrow & \left(\widehat{G}^{top}\right)^{\omega} \\ & (g_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v}\in\mathbf{App}_f(G^{\omega})} & \longmapsto & (g_{\mathbf{w}^{\omega}})_{w\in\mathbf{App}_{discr}(G)} \end{array}$$

qui fait commuter le diagramme (en toute rigueur, il faudrait y ajouter un certain nombre d'oublis ω)

$$\begin{tikzcd} & \widehat{G}^{top} \\ G \arrow[ur, "\widehat{\pi}^{top}"] \arrow[dr, "\widehat{\pi}"'] & \\ & \widehat{G^{\omega}} \arrow[uu, "\widehat{\omega}"'] \end{tikzcd} .$$

On constate alors que cette comparaison n'est pas une obstruction à notre objectif. En effet, si G est un groupe profini « topologique » et que notre caractérisation nous permet d'en déduire que $\widehat{\pi}^{top}$ est un isomorphisme, alors, cela impose que $\widehat{\pi}$ soit injectif, ce qu'on savait déjà. Cette comparaison n'impose rien sur la surjectvité de ce morphisme.

(5.10) Groupes profinis topologiques. La définition de ces dits groupes coule de source, maintenant. On dit qu'un groupe topologique G est *profini* (sous-entendu topologiquement) s'il existe un système projectif $(F_i)_{i\in I}$ de groupes finis discrets tel que G soit « la » limite projective de $(F_i)_{i\in I}$. D'après la proposition **(5.4)**, on sait que tout groupe topologique profini est compact et totalement discontinu. À titre d'information, la réciproque est vraie (*cf.* [Ser02, §1.1]) : tout groupe topologique compact et totalement discontinu est topologiquement profini. Mais, nous choisirons de poursuivre notre étude dans une autre direction.

On peut maintenant énoncer et démontrer :

(5.11) Théorème. *Soit G un groupe topologique. Alors :*

G est topologiquement profini

$$\Updownarrow$$

$\widehat{\pi}^{top} : G \to \widehat{G}^{top}$ *est un isomorphisme (de groupes topologiques).*

Démonstration : Le sens $\Longleftarrow$ est évident puisque $\widehat{G}^{top}$ est toujours topologiquement profini. Supposons maintenant que $\widehat{\pi}^{top}$ est profini : $G = \varprojlim F_i$. Posons d'abord quelques notations :

- $p_i : G \to F_i$ est la projection donnée par la structure de limite projective ;
- $K_i = \{(f_j)_{j\in I} \mid f_i = 1\}$ est le noyau de p_i ; c'est un sous-groupe normal ouvert d'indice fini de G ;

– $\mathbf{v}_i = (F_i, p_i)$ est l'approximation discrète finie selon F_i.

On laisse au lecteur le loisir de montrer que $\widehat{\pi}^{top}$ est injective et on démontre qu'elle est surjective. Soit donc $\mathbf{g} = (g_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_{discr}(G)} \in \widehat{G}^{top}$. Il y a un candidat évident pour son antécédent, c'est la famille $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ définie par

$$f_i = g_{\mathbf{v}_i}.$$

Facilement, cette famille est bien dans G. Il nous faut donc prouver maintenant que $\widehat{\pi}^{top}(\mathbf{f}) = \mathbf{g}$. En fait, de façon un peu plus générale, ce qu'on a, c'est qu'on dispose de deux éléments $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$ dans $\widehat{G}^{top}$, en l'occurence $\mathbf{g} := \mathbf{g}$ et $\mathbf{h} := \widehat{\pi}^{top}(\mathbf{f})$ tels que

$$\forall i \in I \qquad g_{\mathbf{v}_i} = h_{\mathbf{v}_i}$$

et on veut en déduire que $\mathbf{g} = \mathbf{h}$. C'est ainsi formulé qu'on va résoudre le problème.

Soit donc, fixée une fois pour toutes, $\mathbf{v} = (F_{\mathbf{v}}, \varphi_{\mathbf{v}} : F \to F_{\mathbf{v}})$ une approximation de G ; on veut montrer que $g_{\mathbf{v}} = h_{\mathbf{v}}$. Le sous-groupe Ker $(\varphi_{\mathbf{v}})$, en tant qu'ouvert, s'écrit

$$\text{Ker }(\varphi_{\mathbf{v}}) = F \cap \left(\prod_{i \notin \{i_1, \cdots, i_n\}} F_i \times E \right)$$

avec $E \subset F_{i_1} \times \cdots F_{i_n}$ et $\left(1_{F_{i_1}}, \cdots, 1_{F_{i_n}}\right) \in E$. En particulier,

$$F \cap \left(\prod_{i \notin \{i_1, \cdots, i_n\}} F_i \times \left\{ \left(1_{F_{i_1}}, \cdots, 1_{F_{i_n}}\right) \right\} \right) \subset \text{Ker }(\varphi_{\mathbf{v}})$$

c'est-à-dire

$$\bigcap_{j=1}^{n} K_{i_j} \subset \text{Ker }(\varphi_{\mathbf{v}}).$$

Cette inclusion nous fournit une factorisation, qu'on note p,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{v}}"] \arrow[d, "p"'] & F_{\mathbf{v}} \\ G/\bigcap_{j=1}^{n} K_{i_j} \arrow[ur, "\overline{\varphi_{\mathbf{v}}}"'] & \end{tikzcd}$$

En fait, mieux, cette factorisation nous donne :

– d'une part, une nouvelle approximation $\mathbf{v}' = \left(G/\bigcap_{j=1}^{n} K_{i_j}, p\right)$

– et, d'autre part, un morphisme $\overline{\varphi_{\mathbf{v}}} : \mathbf{v}' \to \mathbf{v}$.

En particulier, à cause de la nécessaire compatibilité des familles dans $\widehat{G}^{top}$, il nous suffit maintenant de montrer $g_{\mathbf{v}'} = h_{\mathbf{v}'}$.

Cependant, on peut définir une autre approximation $\mathbf{w} = \mathbf{v}_{i_1} \times \cdots \times \mathbf{v}_{i_n}$ et un morphisme $\psi : \mathbf{v}' \to \mathbf{w}$:

$$\begin{tikzcd} & G/\bigcap_{j=1}^{n} K_{i_j} \arrow[d, "\psi"] \\ G \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "\prod p_i"'] & \prod_{j=1}^{n} F_{i_j} = F_{\mathbf{w}} \end{tikzcd}.$$

Par compatibilité, on a forcément $\psi(f_{\mathbf{v}'}) = f_{\mathbf{w}}$ et $\psi(g_{\mathbf{v}'}) = g_{\mathbf{w}}$. Or, le morphisme ψ est injectif. Donc, si l'on montre que $f_{\mathbf{w}} = g_{\mathbf{w}}$, on pourra conclure.

Enfin, on a la collection de morphismes φ_k, sélection du k-ième facteur, entre approximations,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\prod p_i"] \arrow[dr, "p_k"'] & \prod_{j=1}^n F_{i_j} \arrow[d, "\varphi_k"] \\ & F_{i_k} \end{tikzcd} ,$$

d'après lesquelles on a nécessairement

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{w}} &= \left(g_{v_{i_1}}, \cdots, g_{v_{i_n}}\right) \\ &= \left(f_{v_{i_1}}, \cdots, f_{v_{i_n}}\right) = f_{\mathbf{w}}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure !

Mais, la démonstration n'est pas finie, car on n'a pas démontré que $\widehat{\pi}^{top}$ est bicontinue. Si on prête bien attention à ce qui précède, on remarque qu'on a en fait construit l'application

$$\widecheck{\pi}^{top} : \begin{array}{rcl} \widehat{G}^{top} & \longrightarrow & G \\ (g_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v}\in\mathbf{App}_{discr}(G)} & \longmapsto & (g_{\mathbf{v_i}})_{i\in I} \end{array}$$

et vérifié que $\widehat{\pi}^{top}\widecheck{\pi}^{top} = \mathrm{Id}_{\widehat{G}^{top}}$ et $\widecheck{\pi}^{top}\widehat{\pi}^{top} = \mathrm{Id}_G$. Il nous suffit donc de démontrer que $\widecheck{\pi}^{top}$ est continue. Si

$$U = E \times \prod_{i\notin\{i_1,\cdots,i_n\}} F_i$$

est un ouvert, alors, on a

$$\begin{aligned} \left(\widecheck{\pi}^{top}\right)^{-1}(U) &= \left\{(g_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v}\in\mathbf{App}_{discr}(G)} \mid (g_{\mathbf{v}_{i_1}}, \ldots, g_{\mathbf{v}_{i_n}}) \in E\right\} \\ &= \left(E \times \prod_{\mathbf{v}\notin\left\{\mathbf{v}_{i_1},\ldots,\mathbf{v}_{i_n}\right\}} F_{\mathbf{v}}\right) \cap \widehat{G}^{top} \end{aligned}$$

qui est aussi un ouvert ! ■

---

(6) Complétion profinie et dualité de Tannaka.

Cette partie nécessite d'être familier avec le langage des catégories et en particulier avec la notion d'automorphisme de foncteur. Voici néanmoins, pour le lecteur qui ne l'est pas, un analogue intuitif du principe de la dualité de Tannaka.

(6.1) Dualité de Tannaka et opinions politiques. Considérons une opinion politique donnée, qu'on note $\boldsymbol{\Delta}$; par exemple, on peut prendre $\boldsymbol{\Delta}$ = « Libéralisme économique » ou « Nationalisme » ou « Socialisme » ou « Gauchisme », etc. Considérons maintenant l'ensemble des personnes qui adhèrent à l'opinion $\boldsymbol{\Delta}$: on note $E_{\boldsymbol{\Delta}}$ cet ensemble. On peut très bien regarder cet ensemble de personnes $E_{\boldsymbol{\Delta}}$, ainsi que les relations que les personnes de cet ensemble entretiennent les unes avec les autres, de l'extérieur, indépendamment de l'opinion politique $\boldsymbol{\Delta}$. Une dualité de Tannaka pour ce problème nous dirait alors que, disposant uniquement de ce point de vue extérieur sur $E_{\boldsymbol{\Delta}}$, on peut retrouver l'opinion politique $\boldsymbol{\Delta}$.

(6.2) Dualité de Tannaka ensembliste. Voilà donc ce qui m'a amené à m'intéresser aux groupes profinis. Soit G un groupe. On considère la catégorie $\mathbf{G}-\mathbf{Ens}$ des ensembles munis d'une action à gauche de G. On note

$$\omega : \mathbf{G}-\mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$$

le foncteur oubli. Alors, on a :

(6.3) Théorème. *La flèche naturelle* $\Theta : G \to \mathrm{Aut}\ (\omega)$ *est un isormorphisme de groupes.*

Autrement dit, on peut retrouver le groupe G à partir de la seule information de la catégorie des G-ensembles munie de son foncteur oubli.

Démonstration : La flèche Θ est définie ainsi : si $g \in G$ et si X est un G-ensemble, on considère la bijection λ_g de X dans X définie par $\lambda_g(x) = g \cdot x$. On note $\Theta(g)$ la famille de toutes ces bijections, pour tous les G-ensembles. On vérifie facilement que cette famille constitue un automorphisme de ω ; on vérifie ensuite que la flèche : $\Theta : G \to \mathrm{Aut}\ (\omega)$ est un morphisme de groupes. Montrons que ce morphisme est bijectif.

On note G_l le G-ensemble particulier qu'est G lui-même agissant sur lui-même par translation à gauche. Remarquons que si $\underline{\varphi} = (\varphi_X)_{X \in \mathbf{G}-\mathbf{Ens}}$ est un automorphisme de ω, c'est-à-dire une famille compatible de bijections des ensembles sous-jacents, et que ce $\underline{\varphi}$ provient de G par Θ, *ie*

$$\exists g_0 \in G \qquad \underline{\varphi} = \Theta(g_0)$$

alors, on peut retrouver le g_0 en question. En effet, si tous ces φ_X sont tous des translations à gauche pour tous les G-ensembles X, c'est en particulier le cas pour $X = G_l$. Et donc, on a $\varphi_{G_l}(e) = g_0 \cdot e = g_0$. Ceci montre l'injectivité de Θ.

Pour la surjectivité, on condière $\underline{\varphi} = (\varphi_X)_{X \in \mathbf{G}-\mathbf{Ens}}$ un automorphisme de ω. Soit alors $g_0 = \varphi_{G_l}(e)$. On veut montrer que $\underline{\varphi} = \Theta(g_0)$. Soit donc X un G-ensemble ; on veut montrer que si $x \in X$ alors $\varphi_X(x) = g_0 \cdot x$. Soit donc $x \in X$. Comme l'application de G dans X qui à g associe $g \cdot x$ est un morphisme de G-ensembles, en utilisant la compatibilité de la famille $\underline{\varphi}$, on conclut. ■

(6.4) Dualité de Tannaka ensembliste profinie. La question, naturelle, qu'on se pose alors est : mais que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{G}-\mathbf{Ens}$ par $\mathbf{G}-\mathbf{Ens}_f$, la catégorie des G-ensembles finis ? La réponse à cette question est tout aussi naturelle :

(6.5) Théorème. *Soit G un groupe. On note $\omega_f : \mathbf{G}-\mathbf{Ens}_f \to \mathbf{Ens}_f$ le foncteur oubli. Alors,* $\mathrm{Aut}\,(\omega_f)$ *est naturellement isomorphe à* $\widehat{G}$.

Avant d'en venir à la démonstration, fixons quelques notations. Si X est un G-ensemble fini (de morphisme structural $\varphi : G \to \mathrm{Aut}\ (X)$), pour distinguer entre X et l'ensemble sous-jacent, on notera X_φ pour l'ensemble muni de l'action et X l'ensemble.

Si X_φ est un G-ensemble, on lui associe naturellement une approximation finie de G, qu'on notera $\mathbf{v}_X = (\mathrm{Aut}\ (X), \varphi : G \to \mathrm{Aut}\ (X))$. On note aussi $\mathrm{Trans}\,(X_\varphi)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\ (X)$ constitué par les translations à gauche par des éléments de G :

$$\mathrm{Trans}\,(X_\varphi) = \left\{ \lambda_g : \begin{array}{c} X \longrightarrow X \\ x \longmapsto g \cdot x \end{array}, g \in G \right\} = \mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Aut}\,(X).$$

L'approximation $\mathbf{v}_X$ se factorise toujours par $\mathbf{w}_X = (\text{Trans}\,(X)\,, \varphi : G \to \text{Trans}\,(X))$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathbf{w}_X"] \arrow[dr, "\mathbf{v}_X"'] & \text{Trans}(X) \arrow[d] \\ & \text{Aut}\,(X) \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration : (du théorème). Pour commencer, construisons la flèche $\Theta : \widehat{G} \to \text{Aut}\,(\omega_f)$: elle est plus délicate que dans le cas précédent à construire. Soit donc $\mathbf{x} = (x_\mathbf{v}) \in \widehat{G}$. On veut construire une transformation naturelle inversible de ω_f : on veut construire une famille $(\psi_X)_X$ d'automorphismes de X, lorsque X est un G-ensemble fini. Si X_φ est un tel ensemble, on a l'approximation finie de G, $\mathbf{w}_X$ et donc un élément $x_{\mathbf{w}_X}$ de $\text{Trans}\,(X_\varphi) \subset \text{Aut}\,(X)$. Notons ψ_X cet automorphisme. On veut vérifier maintenant que notre famille $(\psi_X)_X$ est bien compatible. Soit donc $Y_{\varphi'}$ un autre G-ensemble et $f : X \to Y$ une transformation G-équivariante de X_φ dans $Y_{\varphi'}$. On veut montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\psi_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

commute. Cette compatibilité, naturellement, va provenir de la compatibilité entre les approximations. D'abord, quitte à restreindre Y à Im (f), on peut supposer que f est surjective ; sous cette hypothèse, on a alors que le morphisme

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \text{Trans}\,(X_\varphi) & \longrightarrow & \text{Trans}\,(Y_{\varphi'}) \\ \lambda_g & \longmapsto & \lambda_g \end{array}$$

est bien défini et, en fait, est une factorisation de $\mathbf{w}_Y$ à travers $\mathbf{w}_X$; *ie* le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \text{Trans}\,(X_\varphi) \arrow[d, "\Phi"] \\ & \text{Trans}\,(Y_{\varphi'}) \end{tikzcd}$$

commute. Donc, ψ_X et ψ_Y s'écrivent tous les deux λ_g pour un certain g et le diagramme carré commute en vertu du caractère G-équivariant de f. Ainsi, Θ est bien défini ; en outre, on vérifie immédiatement que c'est un morphisme de groupes.

Il s'agit maintenant de montrer l'injectivité et la surjectivité de Θ. Pour commencer, remarquons qu'une approximation finie $\mathbf{v} = (F, \varphi : G \to F)$ induit une action de groupes de G sur F, définie par $g{\cdot}f = \varphi(g)f$; on notera le G-ensemble ainsi défini $X\,(\mathbf{v})$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & F \arrow[d, "\lambda."] \\ & \text{Aut}\,(F) \end{tikzcd}$$

où la flèche $\lambda.$ est injective. Supposons alors qu'une famille $\mathbf{x} \in \widehat{G}$ soit telle que $\Theta\,(\mathbf{x}) = \text{Id}$. En particulier, si $\mathbf{v}$ est une approximation quelconque, l'automorphisme correspondant à $X\,(\mathbf{v})$ va être trivial. Par injectivité de $\lambda.$, $x_\mathbf{v} = 1$ et donc Θ est injective.

Pour la surjectivité, c'est pareil. Chaque approximation $\mathbf{v}$ donne une action de groupe ; l'automorphisme sur cet espace est déterminé par l'image ; l'élément de $F_\mathbf{v}$ est déterminé par l'injectivite de $\lambda.$. On vérifie ensuite la compatibilité de la même manière qu'on l'a fait au début de la démonstration.∎

Naturellement, si on remplace le groupe G par un groupe topologique et qu'on considère $\widehat{G}^{top}$ et les actions continues discrètes, on obtient un résultat similaire, une dualité de Tannaka profinie pour les groupes topologiques.

(7) Généralisations.

Évidemment, tout ce qu'on a fait pour les groupes profinis peut être généralisé à des classes de groupes différentes. Par exemple, étant donné G, au lieu de regarder les approximations finies $(F, G \xrightarrow{\varphi} F)$, on peut considérer les *approximations abéliennes* $(A, G \xrightarrow{\varphi} A)$, où A est un groupe abélien. On obtient alors *l'abélianisé* G^{ab} de G.

De même, si au lieu de considérer les approximations finies, on considère les approximations finies *surjectives*, on obtient le même groupe complété (c'est le lemme **(8.1)**). Autrement dit, dans l'étude de $\widehat{G}$, il suffit de considérer des approximations surjectives.

On peut aussi le faire pour les *approximations abéliennes finies*[9], pour les *approximations finies nilpotentes*, pour les *approximations finies simples surjectives*, etc.

(8) Le groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ n'est pas fortement complet.

Dans cette partie, on revient sur le résultat évoqué en **(4.3)**. Avant d'en venir à la demonstration, même, on va énoncer et prouver quelques petits lemmes. Attention : dans cette partie, on se place dans le cadre des groupes abstraits et non plus de groupes topologiques. Ainsi, lorsqu'on parlera d'une approximation finie, celle-ci ne sera pas continue (d'ailleurs, pour quelle topologie ?).

(8.1) Lemme. *Soit G un groupe. Alors, les complétés profini et « profini surjectif » sont isomorphes. Autrement dit, dans l'étude de $\widehat{G}$, il suffit de considérer les approximations surjectives.*

Démonstration : Pour être plus précis dans l'énoncé du lemme, on peut introduire l'ensemble des approximations finies surjectives,

$$\mathbf{App}_f^s(G) \subset \mathbf{App}_f(G),$$

avec la condition $\mathbf{v} \in \mathbf{App}_f^s(G)$ si, et seulement si, $\varphi_{\mathbf{v}} : G \to F_{\mathbf{v}}$ est surjective. On garde la même notion de morphisme entre approximations finies surjectives, ce qui revient à dire que $\mathbf{App}_f^s(G)$ est une sous-catégorie plein de $\mathbf{App}_f(G)$. Ce qu'on veut démontrer est donc que

$$\widehat{G} = \left\{ (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_f(G)} \in \prod_{\mathbf{v}} F_{\mathbf{v}} \mid \forall \psi : \mathbf{v} \to \mathbf{w},\ \psi(x_{\mathbf{v}}) = x_{\mathbf{w}} \right\}$$

[9] Il semblerait naturel, d'ailleurs, que dans ce cas on ait que $\widehat{G}^{ab}$ égale $\widehat{G^{ab}}$.

et

$$\widehat{G}^s = \left\{ (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_f^s(G)} \in \prod_{\mathbf{v}} F_{\mathbf{v}} \mid \forall \psi : \mathbf{v} \to \mathbf{w},\ \psi(x_{\mathbf{v}}) = x_{\mathbf{w}} \right\}.$$

sont isomorphes à travers la flèche d'« oubli »

$$\omega^s : \begin{array}{rcl} \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{G}^s \\ (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_f(G)} & \longmapsto & (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathbf{App}_f^s(G)} \end{array} .$$

L'ingrédient principal de la preuve est qu'on peut toujours factoriser un morphisme par un morphisme surjectif. Sinon, la démonstration est laissée au lecteur (l'injectivité est plus facile que la surjectivité). ■

Les lemmes suivants classifient les approximations finies surjectives de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$.

(8.2) Lemme. *Soit* $\mathbf{v} = (F, \varphi) \in \mathbf{App}_f^s\left((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}\right)$ *une approximation surjective de* $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$. *Alors, il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* F *soit isomorphe à* $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.

Démonstration : En effet, tout x de F vérifie $x^2 = 1$. On en déduit d'une part que F est abélien et d'autre part que F peut être muni d'une structure de $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel.■

(8.3) Lemme. *Soit* $\mathbf{x} = (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v}} \in \widehat{G}^s$ *une famille compatible d'approchés finis surjectifs. Alors, la famille* $\mathbf{x}$ *est déterminée par ses valeurs prises pour les approximations*

$$\mathbf{v}_f = \left(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, f : (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\right).$$

Démonstration : En effet, si on considère une approximation

$$\mathbf{v} = ((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n, \varphi)$$

et $x_{\mathbf{v}} \in F_{\mathbf{v}} = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$, alors les coordonnées de $x_{\mathbf{v}}$ (et donc $x_{\mathbf{v}}$) sont déterminées par les projections p_i sur les différents facteurs et donc par les $x_{\mathbf{w}}$ correspondant aux approximations $\mathbf{w}$ du type $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, p_i \circ \varphi)$. ■

(8.4) Lemme. *Pour définir une famille compatible* $\mathbf{x} = (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v}} \in \widehat{G}^s$, *il suffit de choisir un* $x_f \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *pour chaque morphisme non-nul* $f : (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, *de telle façon que* $x_{f+g} = x_f + x_g$.

Démonstration : On a vient de voir qu'une telle famille $\mathbf{x}$ est déterminée par les x_f, en notant $x_f = x_{\mathbf{v}_f}$ si $f : (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Il faut donc maintenant voir quelles sont les contraintes imposées par une telle donnée. Cette contrainte provient forcément d'un $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$ de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \\ G \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[rr] & & (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \end{tikzcd} .$$

Par exemple, le cas typique d'une telle contrainte est :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \\ & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \\ G \arrow[uur, "g"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "(f,g)"] \arrow[dr, "f+g"'] & & (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \arrow[uul, "p_2"'] \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_1+p_2"] \\ & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \end{tikzcd}$$

qui impose que si f et g sont deux morphismes vers $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, alors, une famille « compatible » $(x_f)_f$ doit nécessairement vérifier $x_{f+g} = x_f + x_g$. Ce cas est en fait typique car un morphisme $\varphi : (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ s'écrit forcément $\varphi = \sum_{j\in J} p_j$, avec $J \subset \{1, \ldots, m\}$ et où les p_j sont les projections. On vérifie ainsi que, réciproquement, une telle famille $(x_f)_f$ peut toujours s'étendre à $(\widehat{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}})^{\mathbf{N}}$.■

On peut synthétiser ces deux derniers lemmes en :

(8.5) Proposition. *La flèche :*

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}})^{\mathbf{N}} &\longrightarrow Hom_{\mathbf{Gr}}\left(Hom_{\mathbf{Gr}}\left((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\right), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\right) \\ (x_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v}} &\longmapsto \left(f \mapsto x_{\mathbf{v}_f}\right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.
Avec cette identification, la projection profinie s'écrit

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}} &\longrightarrow (\widehat{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}})^{\mathbf{N}} \\ x &\longmapsto (f \mapsto f(x)) \end{aligned}$$

et qui se généralise en :

(8.6) Théorème. *Soit V un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel, p premier. Alors, vus comme groupe additifs, le complété profini $\hat{V}$ et le bidual V^{**} sont naturellement isomorphes. Dans cette identification, la projection profinie correspond à l'injection canonique de V dans son bidual V^{**}.*

On peut enfin en venir à notre contre-exemple :

(8.7) Contre-exemple. *Le groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ est profini mais pas fortement complet.*

Démonstration : En fait, on va montrer que si V est un k-espace vectoriel de dimension infinie, alors, la flèche φ de V vers son bidual V^{**} n'est jamais surjective. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une k-base de V. La famille duale $(e_i{}^*)$ est libre : on peut la compléter en une base $(e_i{}^*) \cap (f_j)_{j \in J}$. On considère alors $\theta \in V^{**}$ défini ainsi : si f dans V^* s'écrit

$$f = \lambda_{i_1} e_{i_1}{}^* + \cdots + \lambda_{i_m} e_{i_m}{}^* + \sum_{(j \in J)} \mu_j f_j$$

alors on pose $\theta(f) = \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_m}$. S'il existait un $v \in V$ tel que $\theta(f) = f(v)$, alors, en considérant $f = e_i{}^*$, on aurait que

$$v = \sum_{i \in I} e_i$$

ce qui est impossible. D'où le résultat. ■

De la démonstration qui précède, on peut déduire le corollaire qui suit. Si G est un groupe, on note $\widehat{G}^{[1]}$ son complété profini et $\widehat{G}^{[i+1]}$ le complété profini de $\widehat{G}^{[i]}$. On a une suite de fl'eches

$$G \xrightarrow{\widehat{\pi}^{[1]}} \widehat{G}^{[1]} \xrightarrow{\widehat{\pi}^{[2]}} \widehat{G}^{[2]} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widehat{G}^{[i]} \xrightarrow{\widehat{\pi}^{[i+1]}} \widehat{G}^{[i+1]} \longrightarrow \cdots .$$

(8.8) Corollaire. *Il existe une classe de groupes G tels que les flèches*

$$G \xrightarrow{\widehat{\pi}^{[1]}} \widehat{G}^{[1]} \xrightarrow{\widehat{\pi}^{[2]}} \widehat{G}^{[2]} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widehat{G}^{[i]} \xrightarrow{\widehat{\pi}^{[i+1]}} \widehat{G}^{[i+1]} \longrightarrow \cdots$$

soient toutes injectives et non surjectives.

Références

[BG01] José I. BURGOS-GIL : Una introducció a la teoria d'arakelov. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 16(1):61–85, 2001.

[NS07a] Nikolay NIKOLOV et Dan SEGAL : On finitely generated profinite groups. I. Strong completeness and uniform bounds. *Ann. of Math. (2)*, 165(1):171–238, 2007.

[NS07b] Nikolay NIKOLOV et Dan SEGAL : On finitely generated profinite groups. II. Products in quasisimple groups. *Ann. of Math. (2)*, 165(1):239–273, 2007.

[Ser02] Jean-Pierre SERRE : *Galois cohomology*. Springer Monogr. Math. Springer-Verlag, Berlin, english édition, 2002. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author.

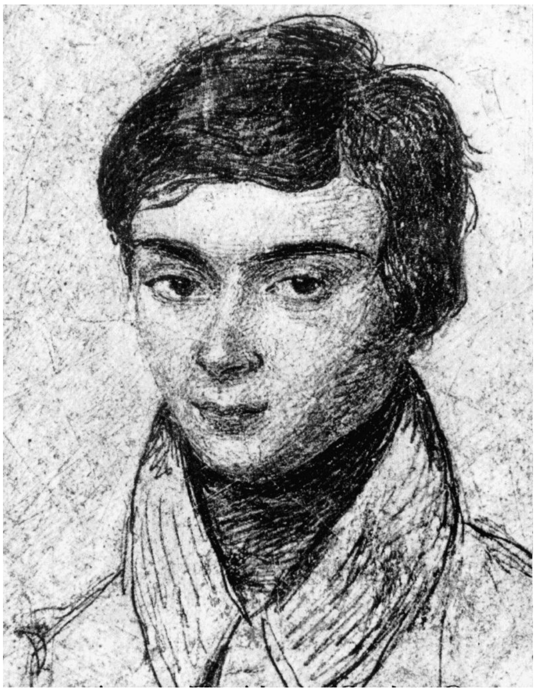

FIG. 1 – L'infinie complexité d'un être humain $g \in \widetilde{\mathcal{H}}$.

Prison de Sainte-Pélagie, lundi 16 mai 1831

FICHE SIGNALETIQUE

N° : 8975E89
NOM : Galois
PRENOM : Evariste

SEXE : M
TAILLE : 1m60
COULEUR DES YEUX : marron
SIGNE PARTICULIER : houpette

DATE DE NAISSANCE : 25 octobre 1811
LIEU DE NAISSANCE : Bourg-la-Reine
PROFESSION : étudiant
SITUATION FAMILIALE : célibataire

DATE D'ARRESTATION : 10 mai 1831
MOTIF DE L'ARRESTATION : trouble à l'ordre public

...

FIG. 2 – L'image profinie $\widehat{\pi}(g)$ de g.