Propriétés schématiques qu'on peut tester sur les germes

Colas Bardavid

mercredi 27 avril 2005

Table des matières

Résultats

Questions en suspens et travail à faire

Rappels et notations

Définition et notations

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé.

Soit $P \in X$ un point. On appelle *anneau des germes de fonctions en* P l'anneau

$$\varinjlim_{\substack{U \subsetneq\!\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow X \\ U \ni P}} \mathcal{O}_X(U).$$

On le note $\mathcal{G}_P\mathcal{O}_X$ ou $\mathcal{O}_{X,P}$

Par définition, on dispose, pour tout ouvert U contenant P d'un morphisme d'anneau

$$\mathcal{G}_P : \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(U) & \to & \mathcal{O}_{X,P} \\ f & \mapsto & \mathcal{G}_P f \end{array} .$$

Description pratique

Comme il s'agit d'une limite inductive d'un système ordonné inductif, on peut décrire cette limite inductive d'une façon particulièrement pratique.

On considère

$$E = \bigcup_{U \subsetneq\!\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow X \text{ et } U \ni P} \{U\} \times \mathcal{O}_X(U)$$

qu'on munit d'une relation d'équivalence définie comme suit : on dit que (U, f) et (V, g) sont équivalents (et on note $(U, f) \sim (V, g)$) s'il existe $W \subsetneq\!\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow X$ contenant P tel que $W \subset U \cap V$ et $f_{|W} = g_{|W}$.

Alors, on peut munir le quotient de E par la relation $\sim$ d'une structure d'anneau. On pose $(U, f) + (V, g) = (U \cap V, f_{|U\cap V} + g_{|U\cap V})$ et $(U, f) \cdot (V, g) = (U \cap V, f_{|U\cap V} \cdot g_{|U\cap V})$.

Notons provisoirement le quotient A.

On a des applications naturelles φ_U de $\mathcal{O}_X(U)$ vers A, qui à $f \in \mathcal{O}_X(U)$ associent (U, f).

Fait 0.1 *A, muni des φ_U, est une limite projective du système* $(\mathcal{O}_X(U))_{\substack{U \subsetneq\!\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow X \\ U \ni P}}$.

Cas des schémas

Un schéma est un espace annelé et tout ceci s'applique dans ce cas particulier.

Si S est le schéma Spec A et si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ alors l'anneau des germes de fonctions en $\mathfrak{p}$ est isomorphe à l'anneau A localisé en dehors de l'idéal premier $\mathfrak{p}$, qu'on note habituellement $A_\mathfrak{p}$.

1 La nullité se teste sur les germes

Proposition 1.1 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Alors :*

$$f = 0 \iff \forall P \in X, \mathcal{G}_P f = 0.$$

Démonstration : Dans un sens, c'est évident.

Dans l'autre sens, si $P \in X$ et $\mathcal{G}_P f = 0$, d'après la description pratique donnée des germes de fonctions dans le préambule, on sait qu'il existe $U_P \overset{\circ}{\hookrightarrow} X$ contenant P et tel que $f_{|U_P} = 0$. Les ouverts U_P recouvrent l'espace X. D'après la propriété de détermination locale des faisceaux, on en déduit que $f = 0$. ■

2 L'inversibilité se teste sur les germes

Proposition 2.1 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Alors :*

$$f \in \mathcal{O}_X(X)^\star \iff \forall P \in X, \mathcal{G}_P f \in \mathcal{O}_{X,P}^\star.$$

Démonstration : Dans un sens, c'est facile : si $f \in \mathcal{O}_X(X)$ admet un inverse g alors, vu que le passage au germe en P est un morphisme d'anneaux, on a encore $(\mathcal{G}_P f)(\mathcal{G}_P g) = 1$.

Dans l'autre sens, il va falloir utiliser la détermincation locale et la définition par recollement. Soit donc $f \in \mathcal{O}_X(X)$ telle que, pour tout $P \in X$, $\mathcal{G}_P f$ possède un inverse g^P dans $\mathcal{O}_{X,P}$. D'après la description pratique faite des germes en préambule, on sait qu'il existe un ouvert U_P de X contenant P et une fonction $h^P \in \mathcal{O}_X(U_P)$ tels que $f_{|U_P} h^P = 1$.

Comme l'inverse est unique, si le résultat annoncé est vrai, c'est que h^P est nécessairement la restriction à U_P de l'inverse de f. On va essayer donc de reconstruire cette inverse globale à l'aide des h^P. Pour cela, il faut que les h^P puissent être recollées les unes aux autres, c'est-à-dire qu'elles coïncident sur leurs intersections.

Considérons donc deux points quelconques P_1 et P_2 de X. Sur U_{P_i}, on a $f_{|U_{P_i}} h_{P_i} = 1$. En restreignant cette relation à l'ouvert $U_{P_i} \cap U_{P_j}$, on obtient les deux relations : $f_{|U_{P_1} \cap U_{P_2}} (h_{P_1})_{|U_{P_1} \cap U_{P_2}} = 1$ et $f_{|U_{P_2} \cap U_{P_1}} (h_{P_2})_{|U_{P_2} \cap U_{P_1}} = 1$. Par unicité de l'inverse dans $\mathcal{O}_X(U_{P_1} \cap U_{P_2})$, on en déduit $(h_{P_2})_{|U_{P_2} \cap U_{P_1}} = (h_{P_1})_{|U_{P_2} \cap U_{P_1}}$.

Ainsi, on a montré que le système des $h^P \in \mathcal{O}_X(U_P)$ est cohérent, les h^P se recollent bien. Comme les U_P recouvrent X et d'après la définition par recollement des faisceaux, on en déduit qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{O}_X(X)$ telle que pour tout U_P, $g_{|U_P} = h^P$.

Il nous reste à vérifier qu'on a bien $fg = 1$ c'est-à-dire $fg - 1 = 0$. Or, lorsqu'on restreint cette fonction sur U_P, on obtient $f_{|U_P} g_{|U_P} - 1 = f_{|U_P} h^P - 1 = 0$. On peut alors conclure par détermination locale, puisque les U_P recouvrent X, qu'on a bien globalement $fg = 1$. ■

On peut exprimer cette proposition autrement :

Proposition 2.2 *Soit* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espace localement annelé. Soit* $f \in \mathcal{O}_X(X)$. *Alors :*

$$f \in \mathcal{O}_X(X)^\star \iff \forall P \in X, f(P) \neq 0.$$

Démonstration : En effet, par définition, $f(P)$ est la valeur de $\mathcal{G}_P f$ dans l'anneau quotient $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{M}_P$. Donc, $f(P) \neq 0$ veut dire que $\mathcal{G}_P f$ n'est pas dans $\mathfrak{M}_P$. Cependant, on sait que $\mathcal{O}_{X,P}$ est un anneau local et donc qu'un élément est inversible dans cet anneau si, et seulement si, il n'est pas dans l'idéal maximal. ■

3 L'injectivité, la surjectvité et la bijectivité des morphismes d'espaces annelés se testent sur les germes

3.1 Rappels

Rappelons qu'un morphisme entre deux espaces annelés $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un couple $(f, f^\#)$ où $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ et où $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ est une transformation naturelle.

Rappelons que $f_*\mathcal{O}_X$ est le préfaisceau sur Y (en fait, c'est un faisceau) qui à $V \underset{\ominus}{\hookrightarrow} Y$ associe l'anneau $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

Rappelons que si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sont deux foncteurs, une transformation naturelle φ de F vers G est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'une flèche $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ de $\mathcal{D}$ telles que, si $f : X \to Y$ est une flèche de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ Y & F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Dès lors, si $(f, f^\#)$ est un morphisme[1] entre les deux espaces annelés $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$, f induit un morphisme entre les anneaux des germes. Plus précisément, pour tout $P \in X$, f induit $f_P : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$.

En effet, si $V \underset{\ominus}{\hookrightarrow} Y$ est un ouvert de Y contenant $f(P)$, comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X contenant P. On peut alors composer les flèches :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f_V^\#"] \arrow[rr, bend right, "\phi_V = \mathcal{G}_P \circ f_V^\#"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\mathcal{G}_P"] & \mathcal{O}_{X,P} \end{tikzcd}$$

[1]Par abus de notation, on note seulement f le morphisme et on sous-entend $f^\#$.

Afin de factoriser le système $\left(\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\phi_V} \mathcal{O}_{X,P} \right)_{f(P)\in V \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y}$ par la limite inductive $\mathcal{O}_{Y,f(P)}$, il faut vérifier que le système est bien compatible aux restrictions entres les $\mathcal{O}_Y(V)$.

4 Le caractère réduit se teste sur les germes

Définition 4.1 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. On dit qu'il est réduit si pour tout ouvert U de X, $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit, c'est-à-dire n'a pas de nilpotent.*

Proposition 4.2 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Alors, X est réduit si, et seulement si, pour tout point $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.*

Démonstration : Supposons que X est réduit. Soit alors $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $h^n = 0$. On trouve un représentant (U, f) de h. On a donc que $f^n = 0$. Mais, comme X est réduit, $f = 0$ et donc $h = 0$.

Dans l'autre sens, supposons que tous les anneaux de germes de fonctions soient réduits. Soit U un ouvert de X et soit $f \in \mathcal{O}_X(U)$ telle que $f^n = 0$. Soit $x \in U$. On a que $\mathcal{G}_x f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est encore nilpotent. Donc, le germe de f en tout point de U est nul. Comme la nullité se teste sur les germes, c'est que f est nulle. Et donc : X est réduit. ■