Propriétés schématiques locales qu'on peut globaliser

Colas Bardavid

mardi 21 juin 2005

Il y a en particulier les propriétés qui se testent globalement (ou, disons, sur un recouvrement affine).

Table des matières

Résultats

Proposition 1 *Soit X un schéma intègre et normal. Alors, $\mathcal{O}_X(X)$ est intégralement clos.*

Proposition 2 *Soit X un schéma réduit. Alors, $\mathcal{O}_X(X)$, l'anneau des fonctions globales, est réduit.*

Questions en suspens et travail à faire

Travail à faire 3 *Concernant la normalité, on peut se prendre la tête à voir ce qui reste si on oublie les hypothèses d'intégrité (globale).*

1 Normalité

On rappelle :

Définition 4 *Soit X un schéma intègre*[1]*. On dit que X est normal si pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_X, x$ est intégralement clos.*

On a alors :

Proposition 5 *Soit X un schéma intègre et normal. Alors, $\mathcal{O}_X(X)$ est intégralement clos.*

Démonstration : Comme X est intègre, tout ouvert non-vide de X est dense dans X.

Soit $\frac{f}{g} \in \operatorname{Frac} \mathcal{O}_X(X)$ un élément entier au-dessus de $\mathcal{O}_X(X)$. On a la relation de dépendance intégrale :

$$\left(\frac{f}{g}\right)^N + \sum_{i=0}^{N-1} h_i \left(\frac{f}{g}\right)^i = 0.$$

Soit U un ouvert affine. On a $g|_U \neq 0$; en effet, sinon on aurait $g(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Or, U est dense dans X est $V(g)$ est un fermé de X ; donc, on aurait $V(g) = X$ et donc $g = 0$ car X est un schéma réduit.

Donc, on peut passer cette relation de dépendance à la restriction à U. On obtient que $\frac{f|_U}{g|_U} \in \operatorname{Frac} \mathcal{O}_X(U)$ est entier au-dessus de $\mathcal{O}_X(U)$.

Or, on sait (*cf.* Propriétés schématiques qui se testent globalement) que, pour un schéma affine et intègre, on a U normal si, et seulement si, $\mathcal{O}_U(U)$ est intégralement clos. Donc, ici, on sait que U est normal affine et intègre et donc que $\mathcal{O}_X(U)$ est intégralement clos. Donc, $\exists h_U \in \mathcal{O}_X(U) \mid \frac{f|_U}{g|_U} = h_U$.

Vérifions maintenant que les fonctions h_U se recollent bien. On a $h_U g|_U = f|_U$. Soit V un autre ouvert affine. On obtient que $g|_{U\cap V}(h_U|_V - h_V|_U) = 0$. Or, $g|_{U\cap V} \neq 0$ (si $U \cap V \neq \varnothing$). Par intégrité, on obtient donc que $h_U|_V = h_V|_U$.

Ainsi, les fonctions h_U se recollent pour donner une fonction h qui vérifie $hg = f$, c'est-à-dire que $\frac{f}{g} = h \in \mathcal{O}_X(X)$.

Ainsi, $\mathcal{O}_X(X)$ est intégralement clos. ■

Travail à faire 6 *Concernant la normalité, on peut se prendre la tête à voir ce qui reste si on oublie les hypothèses d'intégrité (globale).*

2 Caractère réduit

On rappelle qu'on dit qu'un espace annelé est *réduit* si, et seulement si, l'anneau des germes de fonctions régulières est réduit en tout point.

Il est connu (et démontré dans *Propriétés schématiques qu'on peut tester sur les germes*) qu'on a :

[1] On peut omettre intègre dans la définition mais je ne sais pas si ce que je dis est alors encore vrai.

Proposition 7 *Un schéma* $(S, \mathcal{O}_S)$ *est réduit si, et seulement si, pour tout ouvert* $U \overset{\circ}{\hookrightarrow} S$, $\mathcal{O}_S(U)$ *est réduit.*

En particulier, on a :

Proposition 8 *Soit* X *un schéma réduit. Alors,* $\mathcal{O}_X(X)$*, l'anneau des fonctions globales, est réduit.*