Propriétés schématiques qui passent aux germes

Colas Bardavid

jeudi 13 mai 2005

Je pense que beaucoup de propriétés schématiques passent aux germes. C'est en particulier le cas des propriétés qui se vérifient sur les germes.

Table des matières

Résultats

Proposition 0.1 $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\{\textit{idéaux de } S^{-1}A\}}$. *C'est-à-dire que tout idéal de* $S^{-1}A$ *s'écrit* $S^{-1}I$ *avec* I *idéal de* A.

Proposition 0.2 Ψ_p *et* Φ_p *établissent deux bijections réciproques croissantes entre* $\{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\ A \mid \mathfrak{P} \cap S = \varnothing\}$ *et* $\mathrm{Spec}\ S^{-1}A$.

Proposition 0.3 *Soit* X *un schéma localement noethérien. Soit* x *un point de* X. *Alors,* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est noethérien.*

Questions en suspens et travail à faire

1 Les propriétés qui se vérifient sur les germes

Voir ce papier pour plus de précisions.

1.1 La nullité se teste sur les germes

1.2 L'inversibilité se teste sur les germes

1.3 Le caractère réduit se teste sur les germes

2 L'intégrité passe aux germes

Proposition 2.1 *Soit X un schéma intègre. Alors, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre.*

Démonstration : C'est facile. Si $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$ sont telles que $fg = 0$, on trouve des représentants (U, f') et (V, g') de f et g ; quitte à intersecter les ouverts, on peut supposer que $U = V$. Ainsi, sur U, on a $f'g' = 0$; par intégrité, on a par exemple $f' = 0$ et donc $f = 0$. ■
Remarque : Sur cet exemple, on comprend que l'intégrité est un concept d'espace annelé.

3 La noethériennité passe aux germes

C'est un peu moins trivial, il faut étudier l'opération de localisation.

3.1 Idéaux et localisation

Soit A un anneau et soit S une partie multiplicative. On étudie les idéaux de $S^{-1}A$.
On note $\varphi : A \to S^{-1}A$.
On définit :

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \{\text{idéaux de } A\} & \to & \left\{\text{idéaux de } S^{-1}A\right\} \\ I & \mapsto & S^{-1}I = \langle \varphi(I) \rangle_{S^{-1}A} = \left\{ \frac{x}{s}, x \in I \text{ et } s \in S \right\} \end{array}$$

et

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \left\{\text{idéaux de } S^{-1}A\right\} & \to & \{\text{idéaux de } A\} \\ I & \mapsto & \varphi^{-1}(I) = \{x \in A \mid \varphi(x) \in I\} \end{array}.$$

Fait 3.1 *Ψ et Φ sont croissantes.*

On aimerait bien que Φ et Ψ soient inverses l'une de l'autre. Mais c'est faux.

Proposition 3.2 $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\{\text{idéaux de } S^{-1}A\}}$. *C'est-à-dire que tout idéal de $S^{-1}A$ s'écrit $S^{-1}I$ avec I idéal de A.*

Démonstration : Soit J un idéal de $S^{-1}A$.

Soit $\frac{x}{s} \in \Psi \circ \Phi(J)$. Cela signifie qu'il existe $s' \in S$ et $x' \in \Phi(J)$ tels que $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$. Mais $x' \in \Phi(J)$, cela signifie que $\frac{x'}{1} \in J$. Donc $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$ est aussi dans J.

Pour l'autre inclusion : soit $\frac{x}{s} \in J$; en multipliant par s, on voit que $x \in \Phi(J)$. Donc, $\frac{x}{s}$ est dans $\Psi \circ \Phi(J)$. ■

Déception 3.3 *On n'a pas* $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\{idéaux\ de\ A\}}$. *Cela signifie que* Ψ *n'est pas injective.*

Démonstration : On donne le contre exemple suivant. Prendre $A = \mathbf{Z}$ et $S = \left\{2^k, k \in \mathbf{N}\right\}$. Alors $S^{-1}(2) = S^{-1}A = S^{-1}(4)$. ■

3.2 Idéaux premiers et localisation

Avec les idéaux premiers, ça marche !

On définit :

$$\Psi_p : \begin{array}{r} \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\ A \mid \mathfrak{P} \cap S = \varnothing\} \to \mathrm{Spec}\ S^{-1}A \\ \mathfrak{P} \mapsto S^{-1}\mathfrak{P} \end{array}$$

et

$$\Phi_p : \begin{array}{c} \mathrm{Spec}\ S^{-1}A \to \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\ A \mid \mathfrak{P} \cap S = \varnothing\} \\ \mathfrak{Q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{Q}) \end{array}.$$

Vérifions que ces définitions sont exactes.

Montrons que $S^{-1}\mathfrak{P}$ est bien premier. Soient $\frac{x}{s}$ et $\frac{y}{s'} \in S^{-1}A$ tels que $\frac{xy}{ss'} \in S^{-1}\mathfrak{P}$. Cela signifie qu'il existe $z \in \mathfrak{P}$ et $s'' \in S$ tels que $\frac{xy}{ss'} = \frac{z}{s''}$. Donc, il existe $\tilde{s} \in S$ tel que $\tilde{s}(s''xy - s'sz) = 0$. Cependant $\tilde{s} \notin P$ et le produit (qui est nul) est dans $\mathfrak{P}$; donc $s''xy - s'sz \in \mathfrak{P}$. Comme $s'sz$ est déjà dans $\mathfrak{P}$, $s''xy \in \mathfrak{P}$. Comme $s'' \notin \mathfrak{P}$, $xy \in \mathfrak{P}$ et donc soit x soit y est dans $\mathfrak{P}$. Par exemple, $\frac{x}{s} \in S^{-1}\mathfrak{P}$.

Donc, $S^{-1}\mathfrak{P}$ est premier.

Il faut encore vérifier que $\varphi^{-1}(\mathfrak{Q})$ n'intersecte pas S. C'est facile : si I est un idéal qui intersecte S, alors son image devient inversible dans $S^{-1}A$ et donc $S^{-1}I = S^{-1}A$. Or, si J est un idéal de $S^{-1}A$, J peut être reconstruit en faisant $\Psi \circ \Phi(J) = S^{-1}\varphi^{-1}(J)$. Donc, si J n'est pas l'idéal plein, $\varphi^{-1}(J)$ ne rencontre pas S.

Proposition 3.4 Ψ_p *et* Φ_p *établissent deux bijections réciproques croissantes entre* $\{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\ A \mid \mathfrak{P} \cap S = \varnothing\}$ *et* $\mathrm{Spec}\ S^{-1}A$.

Démonstration : On doit juste montrer que $\Phi_p \circ \Psi_p = \mathrm{Id}_{\{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\ A \mid \mathfrak{P} \cap S = \varnothing\}}$.

Soit donc $\mathfrak{P}$ un idéal de A qui n'intersecte pas S.

Soit $x \in \Phi_p \circ \Psi_p(\mathfrak{P})$. Cela veut dire que $\varphi(x) \in \Psi_p(\mathfrak{P})$. Cela veut dire qu'il existe $y \in \mathfrak{P}$ et $s \in S$ tel que $\frac{x}{1} = \frac{y}{s}$. Cela veut dire qu'il existe $s' \in S$ tel que $s'(xs - y) = 0$. Comme précédemment, on en déduit que $x \in \mathfrak{P}$.0

Pour l'autre inclusion, soit $x \in \mathfrak{P}$. Alors, $\frac{x}{1} \in \Psi_p(\mathfrak{P})$ et donc $x \in \Phi_p \circ \Psi_p(\mathfrak{P})$. ■

3.3 Les espaces de germes d'un schéma localement noethérien sont noethériens

Proposition 3.5 *Soit X un schéma localement noethérien. Soit x un point de X. Alors, $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien.*

Démonstration : Soit $x \in X$ et soit U un ouvert affine contenant x et affine : on suppose que $U = \operatorname{Spec} A$ avec A noethérien et que x correspond à l'idéal premier $\mathfrak{P}$. L'anneau des germes de fonctions $\mathcal{O}_{X,x}$ peut alors s'identifier à $A_{\mathcal{P}}$, le localisé de A par rapport à $\mathfrak{P}$.

Montrons plus généralement que si A est noethérien, alors $S^{-1}A$ est noethérien.

Soit I_i donc une suite croissante d'idéaux de $S^{-1}A$. D'après les préliminaires sur la localisation, on peut écrire $I_i = S^{-1}(J_i)$. Comme nos correspondances entre les idéaux sont croissantes, les J_i sont aussi croissants. Et donc, ils stationnent. Et donc aussi les I_i. ■

Au passage, on a démontré :

Principe 3.6 *Les localisés d'un anneau noethérien sont noethériens.*