Propriétés schématiques qui se testent globalement

Colas Bardavid

lundi 20 juin 2005

Ne soyons pas trop utopiste, il s'agit à mon avis plus de propriétés qui se vérifient dans un ouvert affine.

Table des matières

Résultats

Proposition 1 *Soit A un anneau intègre. Alors, A est intégralement clos si, et seulement si, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de A, $A_{\mathfrak{P}}$ est intégralement clos.*

Lemme 2 *Soit A un anneau intègre. On plonge A ainsi que tous ses localisés dans $K = \operatorname{Frac} A$. Alors,*

$$\bigcap_{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A} A_{\mathfrak{P}} = A.$$

Proposition 3 *Soit X un schéma affine. Alors, X est réduit si, et seulement si, $\mathcal{O}_X(X)$ est réduit.*

Propriété 4 *Un ouvert d'un schéma localement noethérien est localement noethérien.*

Théorème 5 *Soit X un schéma localement noethérien. Alors, tout ouvert affine de X a son anneau des fonctions noethérien.*

Théorème 6 *Un schéma affine est noethérien si, et seulement si, son anneau des fonctions globales est noethérien.*

Questions en suspens et travail à faire

1 La normalité se teste sur les ouverts affines

Rappelons la

Définition 7 *Soit X un schéma. On dit que X est normal si pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos (donc intègre).*

On démontre :

Proposition 8 *Soit X un schéma affine intègre. Alors, X est normal si, et seulement si, $\mathcal{O}_X(X)$ est intégralement clos.*

(Plus faiblement — mais équivalemment : si X est un schéma affine tel que $\mathcal{O}_X(X)$ est intègre, alors X est normal si, et seulement si, $\mathcal{O}_X(X)$ est intégralement clos.)

ou, plutôt, la version algébrique :

Proposition 9 *Soit A un anneau intègre. Alors, A est intégralement clos si, et seulement si, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de A, $A_{\mathfrak{P}}$ est intégralement clos.*

On utilise le lemme :

Lemme 10 *Soit A un anneau intègre. On plonge A ainsi que tous ses localisés dans $K = \operatorname{Frac} A$. Alors,*

$$\bigcap_{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A} A_{\mathfrak{P}} = A.$$

qu'on peut en fait améliorer en

Lemme 11 *Soit A un anneau intègre. On plonge A ainsi que tous ses localisés dans $K = \operatorname{Frac} A$. Alors,*

$$\bigcap_{\mathfrak{M} \in \operatorname{Specmax} A} A_{\mathfrak{M}} = A.$$

Démonstration : (du lemme 10)

Évidemment, on a $A \subset \bigcap_{\mathfrak{M} \in \operatorname{Specmax} A} A_{\mathfrak{M}}$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{\mathfrak{M} \in \operatorname{Specmax} A} A_{\mathfrak{M}}$. On note $I = \left\{b \in A \mid \exists a \in A \mid \frac{a}{b} = x\right\}$ qui, par miracle, est un idéal. I est clairement stable par scalairisation par A. Mais, surprise (je ne sais pas !)

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a + a'}{b + b'},$$

sauf cas franchement défavorable, évidemment.

Si $I = A$, c'est fini, car $1 \in A$ et donc $x \in A$. Sinon, on peut inclure I dans un idéal maximal $\mathfrak{M}$. Cependant, dire que $x \in A_{\mathfrak{M}}$, c'est dire que $\exists b \in I \mid b \notin \mathfrak{M}$. C'est absurde. D'où le résultat. ■

Vu cette nouvelle version forte du lemme, on renforce notre proposition :

Proposition 12 *Soit A un anneau intègre. Alors, A est intégralement clos si, et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, $A_{\mathfrak{M}}$ est intégralement clos.*

Démonstration : (de la proposition 11)

Supposons d'abord que A est intégralement clos. Puis, soit $\mathfrak{M} \in \operatorname{Specmax} A$. Soit $x \in K$ qui est entier au-dessus de $A_{\mathfrak{M}}$. On a donc :

$$x^N + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i}{p_i} x^i = 0,$$

où $a_i \in A$ et $p_i \notin \mathfrak{M}$.

On mutliplie tout par $\prod_{1 \leq i \leq N-1} p_i$ pour obtenir :

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq N-1} p_i \right) x^N + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\prod_{j \neq i} p_j \right) a_i x^i = 0,$$

Quitte à multiplier encore par une puissance de $\left(\prod_{1 \leq i \leq N-1} p_i \right)$, on en déduit que $\tilde{x} = \left(\prod_{1 \leq i \leq N-1} p_i \right) x$ est entier au-dessus de A. Donc, $\tilde{x} \in A$. Donc, $x \in A_{\mathfrak{M}}$ (le produit d'éléments en dehors de $\mathfrak{M}$ est en dehors de $\mathfrak{M}$).

Réciproquement, supposons que pour tout $\mathfrak{M}$, idéal maximal, $A_{\mathfrak{M}}$ est intégralement clos. Soit $x \in K$, entier au-dessus de A. En particulier, pour tout $\mathfrak{M}$, idéal maximal, x est entier au-dessus de $A_{\mathfrak{M}}$. Donc, $x \in \bigcap_{\mathfrak{M} \in \operatorname{Specmax} A} A_{\mathfrak{M}}$. D'après le lemme 10, $x \in A$. Donc, A est intégralement clos. ∎

2 Le caractère réduit se teste sur les ouverts affines

Ce qui s'exprime ainsi :

Proposition 13 *Soit A un anneau. Alors, A est réduit si, et seulement si, pour tout idéal $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A$, $A_{\mathfrak{P}}$ est réduit.*

Démonstration : Dans un sens, c'est clair : supposons que A n'a pas de nilpotent. Si $A_{\mathfrak{P}}$, pour un certain $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A$ a un élément nilpotent, notons-le $\frac{x}{y}$; on a $\left(\frac{x}{y}\right)^N = \frac{x^N}{y^N} = 0$, ce qui signifie qu'il existe z en dehors de $\mathfrak{P}$ tel que $zx^N = 0$. En multipliant par z^{N-1}, on voit zx est nilpotent, donc est nul. Cela veut dire que $\frac{x}{1} = \frac{x}{y} = 0$.

Réciproquement, supposons que tous les localisés aux idéaux premiers de A soient réduits. Soit $f \in A$ nilpotent. On a donc $f^N = 0$. Donc, l'image dans tous les localisés $A_{\mathfrak{P}}$ de f^N est nulle et donc $\frac{f}{1}$, dans tous les localisés, est nilpotent donc nul. Cela signifie que pour tout $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A$, il existe $g_{\mathfrak{P}} \notin \mathcal{P}$ tel que $g_{\mathfrak{P}} f = 0$. L'idéal engendré par les $g_{\mathfrak{P}}$ vaut A. En effet, sinon, ce serait un idéal strict qui serait contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{M}$ mais qui en même temps contiendrait l'élément $g_{\mathfrak{M}}$, qui, lui, n'est pas dans $\mathfrak{M}$. Donc, $1 \in (g_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A}$. Donc, il existe un nombre fini d'éléments $g_{\mathfrak{P}_1}, \ldots, g_{\mathfrak{P}_n}$ et des fonctions $h_1, \ldots, h_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} h_i g_{\mathfrak{P}_i} = 1$. Á partir de là, il est clair que $f = 0$. ■

Remarque : J'ai trouvé le second point de la démonstration en me demandant comment on fait pour démontrer géométriquement cette évidence géoémtrique, qui vient du fait qu'un schéma affine est quasi-compact.

Géométriquement, cela donne :

Proposition 14 *Soit X un schéma affine. Alors, X est réduit si, et seulement si, $\mathcal{O}_X(X)$ est réduit.*

3 La noethériennité se teste sur les ouverts affines

Dans toute cette partie, n'oublions pas le

Principe 15 *Les localisés d'un anneau noethérien sont noethériens.*

démontré dans *Propriétés schématiques qui passent aux germes.*

3.1 Rappels, définitions

Pour les définitions, je suis EGA I.

Définition 16 *Un schéma S est dit noethérien (resp. localement noethérien) s'il est réunion finie (resp. réunion) d'ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont noethériens.*

Comme les ouverts affines sont quasi-compacts,

Propriété 17 *Un schéma noethérien est quasi-compact.*

D'abord, on peut faire le lien avec les autre définitions possibles :

Propriété 18 *Un schéma est localement noethérien si, et seulement si, chaque point possède un voisinage affine dont l'anneau des fonctions est noethérien.*

Démonstration : Si S est localement noethérien, évidemment, chaque point possède un voisinage affine sont l'anneau des fonctions est noethérien. Réciproquement, pareil, c'est évident. ■

De même, on peut écrire :

Propriété 19 *Un schéma est noethérien si, et seulement si, il est localement noethérien et s'il est quasi compact.*

Démonstration : Dans un sens c'est clair.

Dans l'autre aussi. ■

Remarquons que pour un schéma affine, il est équivalent d'être noethérien ou d'être localement noethérien (car un schéma affine est quasi compact).

On peut aussi dire, en vertu du principe 14 que :

Propriété 20 *Un ouvert d'un schéma localement noethérien est localement noethérien.*

3.2 Test sur les ouverts affines

Ce que l'on veut dire, c'est :

Théorème 21 *Soit X un schéma localement noethérien. Alors, tout ouvert affine de X a son anneau des fonctions noethérien.*

Démonstration : Soit U un ouvert affine. Comme U est localement noethérien, on écrit $U = U_1 \cup \cdots \cup U_j \cup \cdots$ où les U_j sont des ouverts affines dont l'anneau des fonctions est noethérien. Comme les $D(f)$, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, forment une base d'ouverts de U (car U est affine), pour chaque j, on peut écrire $U_j = D(f_1(j)) \cup \cdots \cup D(f_k(j)) \cup \cdots$. On a $D(f_k(j)) \subset U_j$ et donc $D(f_k(j)) \cap U_j = D(f_k(j)) = D(f_k(j)|_{U_j})$. D'après le principe 14, l'ouvert $D(f_k(j)|_{U_j})$ de U_j a son anneau de fonctions noethérien et il en est donc de même pour $D(f_k(j))$. Ainsi, vu en plus que U est quasi compact (car affine), on peut écrire $U = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_N)$, où les f_i sont dans $\mathcal{O}_X(U)$ et où les anneaux $\mathcal{O}_X(D(f_i))$ sont noethériens.

Soit maintenant I un idéal de $\mathcal{O}_X(U)$. On veut montrer que I est un idéal de type fini. L'image de I dans $\mathcal{O}_X(D(f_i))$ est de type fini. Si on note $U = \operatorname{Spec} A$, I est un idéal de A et l'image de I dans $\mathcal{O}_X(D(f_i)) = A_{f_i}$ est simplement l'idéal $S^{-1}I$ où S est la partie multiplicative $\left\{1, f_i, {f_i}^2, \ldots\right\}$: $S^{-1}I = \left\{\frac{x}{f^n}, x \in I \text{ et } n \in \mathbf{N}\right\}$. Cet idéal, donc, est de type fini ; disons qu'il est engendré par les $p(i)$ éléments

$$\frac{a_1(i)}{{f_i}^{n_1(i)}}, \ldots, \frac{a_{p(i)}(i)}{{f_i}^{n_{p(i)}(i)}}.$$

Montrons alors que I est engendré par les $a_k(i)$, i variant entre 1 et N et k variant entre 1 et $p(i)$. Soit $f \in I$. Pour tout i, f peut être vu comme un élément de A_{f_i} et on peut donc écrire :

$$f = \sum_{k=1}^{p(i)} g_k(i) \frac{a_k(i)}{{f_i}^{n_k(i)}}.$$

En fait, en multipliant par une puissance suffisamment grande de f_i, on a :

$$\left({f_i}^{N_i}\right) f = \sum_{k=1}^{p(i)} g'_k(i) a_k(i).$$

Or, pour tout i et pour tout n, on a que $D(f_i) = D({f_i}^n)$ et donc $U = \bigcup_i D({f_i}^{N_i})$. Donc, $1 \in \left({f_1}^{N_1}, \ldots, {f_N}^{N_N}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe $h_1, \ldots, h_N$ telles que $\sum_i h_i {f_i}^{N_i} = 1$.

En mettant tout cela bout à bout, on voit que f est bien une combinaison des $a_k(i)$: I est de type fini et donc $\mathcal{O}_X(U)$ est noethérien. ■

En particulier,

Théorème 22 *Un schéma affine est noethérien si, et seulement si, son anneau des fonctions globales est noethérien.*

Démonstration : D'abord, si A est noethérien alors il est évident que $\operatorname{Spec} A$ est noethérien. L'autre sens est une conséquence directe du théorème précédent.■