Recollements d'espaces de Cartan relatifs

Colas Bardavid

samedi 9 juillet 2005

Table des matières

1 Introduction 4

2 Hypothèses 4

3 Construction du S-espace de Cartan recollé 5

4 Théorème de recollement des espaces de Cartan relatifs 7

Résultats

Questions en suspens et travail à faire

Travail à faire 1 *Bosser les espaces de Cartan généraux. Quelle(s) hypothèse(s) sur la catégorie* $\mathfrak{C}$ *de valeurs du faisceau ?*

1 Introduction

Définition 2 *D'après Amaury Thuillier, Dieudonné, dans son petit cours de géométrie algébrique appelle* espace de Cartan *un espace topologique X muni d'un faisceau $\mathcal{O}_X$ à valeurs dans une catégorie $\mathfrak{C}$.*

Le but de ce texte est de généraliser le théorème suivant, prouvé dans [Che].

Théorème 3 (Recollements de faisceaux)
- *Soit I un ensemble d'indices et $\mathfrak{C}$ une catégorie fixée.*
- *Pour tout $i \in I$, soit $(X_i, \mathcal{O}_i)$ un espace topologique muni d'un faisceau $\mathcal{O}_i$ à valeurs dans $\mathfrak{C}$.*
- *Pour tous $i, j \in I$, soit $\Omega_j(i) \hookrightarrow X_i$ un ouvert, qu'on munit du faisceau restreint pour obtenir un espace $(\Omega_j(i), \mathcal{O}_i \mid_{\Omega_j(i)})$.*
- *Enfin, pour tous $i, j \in I$, soit $\varphi_{i,j} : (\Omega_j(i), \mathcal{O}_i \mid_{\Omega_j(i)}) \to (\Omega_i(j), \mathcal{O}_j \mid_{\Omega_i(j)})$ un morphisme.*

On suppose que ces données vérifient :

H1 $\Omega_i(i) = X_i$ *et* $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$

H2 $\varphi_{ij}\Big(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)\Big) \subset \Omega_i(j) \cap \Omega_k(j)$

H3 (conditions de recollement) *Sur $\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$, on a $\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$*

Alors, il existe un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ muni d'un faisceau à valeurs dans $\mathfrak{C}$, recouvert par des ouverts $\widetilde{X_i} \hookrightarrow X$ et des isomorphismes

$$\psi_i : (X_i, \mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} (\widetilde{X}_i, \mathcal{O}\,|_{\widetilde{X}_i}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O})$$

qui vérifient :

C1 $X = \bigcup_{i \in I} \widetilde{X}_i$

C2 *Au-dessus de $\Omega_j(i)$, on a $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$. C'est-à-dire que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X_i & \Omega_j(i) \arrow[l, hook'] \arrow[dd, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\
& & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j \\
X_j & \Omega_i(j) \arrow[l, hook'] \arrow[ur, "\psi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

C3 $\left\{ \begin{array}{l} x \in X_i \\ y \in X_j \\ \psi(x) = \psi(y) \end{array} \right. \implies x \in \Omega_j(i)$ *et* $y = \varphi_{ij}(x)$

C3bis $\psi_i\Big(\Omega_j(i)\Big) = \psi_j\Big(\Omega_i(j)\Big) = \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j$

Enfin, il y a unicité à un unique isomorphisme près (compatible avec les données).

On aimerait généraliser ce résultat aux espaces de Cartan relatifs, c'est-à-dire munis d'une flèche, dite *structurale*, vers un même objet S.

2 Hypothèses

Dans cette partie, on fixe les données et les notations qu'on utilisera pour le recollement.

$\mathfrak{C}$ est une catégorie (qui admet les produits quelconques, je crois).

S est un $\mathfrak{C}$-espace de Cartan, c'est-à-dire un espace topologique S muni d'un faisceau structural $\mathcal{O}_S$ à valeurs dans la catégorie $\mathfrak{C}$.

I est un ensemble d'indices.

$\left(\begin{array}{c} X_i \\ \downarrow p_i \\ S \end{array}\right)_{i\in I}$ est une famille de S-espaces de Cartan ; ce sont eux qu'on va recoller.

Ainsi, pour chaque $i,j \in I$, on se donne un ouvert $\Omega_j(i) \hookrightarrow X_i$ (l'indice entre parenthèses indique l'espace dans lequel l'ouvert vit), qu'on munit de la structure de S-espace de Cartan sous-jacente : $\begin{array}{c} \Omega_j(i) \\ \downarrow p_i \\ S \end{array}$. Lorsque $i = j$, on a $\Omega_i(i) = X_i$.

C'est le long de ces ouverts qu'on recolle les X_i entre eux : pour chaque i, j, on se donne

$$\begin{tikzcd} \varphi_{i,j} : \Omega_j(i) \arrow[rr] \arrow[dr, "p_i"'] & & \Omega_i(j) \arrow[dl, "p_j"] \\ & S & \end{tikzcd} ,$$

qui fait commuter le diagramme précédent (on dit que $\varphi_{i,j}$ est un S-*morphisme*). On suppose que $\varphi_{i,i} = \mathrm{Id}_{X_i}$.

On fait des hypothèse dite de recollement sur les $\varphi_{i,j}$. On suppose que $\varphi_{ij}\Big(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)\Big) \subset \Omega_i(j) \cap \Omega_k(j)$ et que sur $\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$, on a $\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$.

Finalement, si on oublie les morphisme structuraux, on est exactement dans la situation des hypothèse du théorème classique de recollement des espaces de Cartan.

3 Construction du S-espace de Cartan recollé

On dipose donc de X, un espace de Cartan, d'ouverts $\widetilde{X_i} \hookrightarrow X$ homéomorphes *via* $X_i \xrightarrow{\varphi_i} \widetilde{X_i}$ à X_i, telles que ces flèches fassent commmuter le diagramme générique :

$$\begin{tikzcd} X_i & \Omega_i(j) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ & & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j \\ X_j & \Omega_j(i) \arrow[l, hook'] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd} .$$

Tout ce qu'on doit faire, c'est recoller des morphismes. Sur $\widetilde{X_i}$, par transport par isomorphisme, on dispose de $\begin{tikzcd} \widetilde{X_i} \arrow[d, "\widetilde{p_i}"'] & X_i \arrow[l, "\varphi_i"'] \arrow[dl, "p_i"] \\ S & \end{tikzcd}$, défini pour que le diagramme commute.

Vérifions que ces morphismes $\widetilde{p_i}$ se recollent, c'est-à-dire que $\widetilde{p_i}|_{\widetilde{X_i}\cap\widetilde{X_j}} = \widetilde{p_j}|_{\widetilde{X_i}\cap\widetilde{X_j}}$.

La conclusion **C3bis** nous assure que si on restreint ${\varphi_i}^{-1}$ à $\widetilde{X_i} \cap \widetilde{X_j}$ on tombe sur $\Omega_j(i)$. On peut donc écrire :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X_i} \cap \widetilde{X_j} \arrow[r, "{\varphi_i}^{-1}"] \arrow[d, "\widetilde{p_i}"'] & \Omega_j(i) \arrow[dl, "p_i"] \\ S & \end{tikzcd} .$$

En combinant le diagamme précédent, celui que nous donne **C2** et celui qui dit que les $\varphi_{i,j}$ sont des S-morphismes, on trouve facilement que les $\widetilde{p_i}$ se recollent effectivement : on peut construire $\begin{array}{c} X \\ \downarrow p \\ S \end{array}$ tel que $p|_{\widetilde{X_i}} = \widetilde{p_i}$.

Alors, par construction, les φ_i sont des S-isomorphismes entre X_i et $\widetilde{X_i}$ et le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
X_i & \Omega_j(i) \arrow[l, hook', "\circ" marking] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[rrd, bend left, "p_i"] & & \\
& & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j \arrow[r, "p"] & S \\
X_j & \Omega_i(j) \arrow[l, hook', "\circ" marking] \arrow[ur, "\varphi_j"'] \arrow[rru, bend right, "p_j"'] & &
\end{tikzcd}
\quad \textit{commute.}
$$

4 Théorème de recollement des espaces de Cartan relatifs

Théorème 4 (Recollements des espaces de Cartan relatifs)

– *Soit I un ensemble d'indices et $\mathfrak{C}$ une catégorie fixée.*

– *Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un espace de Cartan à valeurs dans $\mathfrak{C}$ qui sera l'espace de base.*

– *Pour tout $i \in I$, soit* $\begin{array}{c}(X_i, \mathcal{O}_i)\\ \downarrow{\scriptstyle p_i}\\ S\end{array}$ *un S-espace de Cartan.*

– *Pour tous $i, j \in I$, soit $\Omega_j(i) \hookrightarrow X_i$ un ouvert, qu'on munit du faisceau restreint pour obtenir un S-espace de Cartan* $\begin{array}{c}(\Omega_j(i), \mathcal{O}_i\mid_{\Omega_j(i)})\\ \downarrow{\scriptstyle p_i|_{\Omega_j(i)}}\\ S\end{array}$.

– *Enfin, pour tous $i, j \in I$, soit* $\varphi_{i,j}$:
$$\begin{tikzcd}(\Omega_j(i), \mathcal{O}_i\mid_{\Omega_j(i)}) \arrow[rr] \arrow[dr, "p_i"'] & & (\Omega_i(j), \mathcal{O}_j\mid_{\Omega_i(j)}) \arrow[dl, "p_j"] \\ & S & \end{tikzcd}$$
un morphisme de S-espaces de Cartan qui fait commuter le diagramme.

On suppose que ces données vérifient :

H1 $\Omega_i(i) = X_i$ *et* $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$

H2 $\varphi_{ij}\Big(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)\Big) \subset \Omega_i(j) \cap \Omega_k(j)$

H3 (conditions de recollement) *Sur $\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$, on a $\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$*

Alors, il existe un S-espace de Cartan $\begin{array}{c}(X, \mathcal{O})\\ \downarrow{\scriptstyle p}\\ S\end{array}$, *recouvert par des ouverts $\widetilde{X_i} \hookrightarrow X$ et des S-isomorphismes*

$$\begin{tikzcd}\psi_i : (X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "p_i"'] & (\widetilde{X}_i, \mathcal{O}|_{\widetilde{X}_i}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p|_{\widetilde{X_i}}"] & (X, \mathcal{O}) \\ & S & \end{tikzcd}$$

qui vérifient :

C1 $X = \bigcup_{i \in I} \widetilde{X}_i$

C2 *Au-dessus de $\Omega_j(i)$, on a $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$. C'est-à-dire que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}X_i & \Omega_j(i) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[rr, bend left, "p_i"] & & \\ & & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j \arrow[r, "p"] & S \\ X_j & \Omega_i(j) \arrow[l, hook'] \arrow[ur, "\varphi_j"'] \arrow[rru, bend right, "p_j"'] & & \end{tikzcd}$$
commute.

C3 $\left\{\begin{array}{l} x \in X_i \\ y \in X_j \\ \psi(x) = \psi(y) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad x \in \Omega_j(i)$ *et* $y = \varphi_{ij}(x)$

C3bis $\psi_i\Big(\Omega_j(i)\Big) = \psi_j\Big(\Omega_i(j)\Big) = \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j$

Enfin, il y a unicité à un unique isomorphisme près (compatible avec les données).

Références

[Che] Claude Chevalley, *Introduction à la théorie des schémas*