Recollements de faisceaux et de morphismes

Colas Bardavid

samedi 25 juin 2005

Table des matières

Résultats

Principe 1 *La donnée d'un faisceau sur X est équivalente à la donnée des restrictions de ce faisceau aux ouverts d'un recouvrement.*

Théorème 2 *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un autre espace annelé.*

Soient $\varphi_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \to (S, \mathcal{O}_S)$ des morphismes tels que, pour tous $i, j \in I$, $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$.

Alors, il existe un unique $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ tel que pour tout $i \in I$, $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$.

Questions en suspens et travail à faire

Petit travail à faire 3 *S'informer un peu des faisceaux à valeurs dans une catégorie plus ou moins quelconque.*

1 Recollement de faisceaux

Je reprends dans cette section le théorème de recollement des faisceaux, démontré entièrement dans l'*Introduction à la théorie des schémas* de Claude Chevalley (dans EGA, Grothendieck dit que c'est évident).

1.1 Un faisceau est déterminé localement

Avant de commencer, on énonce un fait évident. On se place dans le cadre des espaces annelés, mais ceci se généralise à des faisceaux quelconques, je pense.

Soit X un espace topologique. On note $\mathcal{F}_{\mathbf{Ann}}(X)$ l'ensemble des faisceaux d'anneaux sur X.

Alors :

Fait 4 *Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors,*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{\mathbf{Ann}}(X) & \to & \prod_{i\in I} \mathcal{F}_{\mathbf{Ann}}(U_i) \\ \mathcal{G} & \mapsto & (\mathcal{G}\,|_{U_i})_{i\in I} \end{array} \quad \textit{est injective (modulo isomorphisme).}$$

Démonstration : Soit U un ouvert de X. On veut démontrer que $\mathcal{G}(U) \simeq \mathcal{F}(U)$ en supposant que $\varphi(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{F})$.

Soit $f \in \mathcal{F}(U)$. Alors, $f_i = f|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$; par ailleurs, les f_i se recollent (pour $\mathcal{G}$) : $\rho_{\mathcal{G}}(f_i, U_i \cap U_j) = \rho_{\mathcal{F}}(f_i, U_i \cap U_j)$ puisque ce sont les faisceaux qui sont égaux et non pas juste les sections sur un recouvrement.

Donc, à $f \in \mathcal{F}(U)$, on peut associer une unique $f_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}(U)$.

On vérifie ensuite que cette fonction est un morphisme d'anneaux et que la même construction de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{F}$ donne le morphisme réciproque. ■

En fait, on peut dire plus général que le fait précédent :

Principe 5 *La donnée d'un faisceau sur X est équivalente à la donnée des restrictions de ce faisceau aux ouverts d'un recouvrement.*

Cependant, la donnée d'un faisceau n'est pas équivalente à la donnée des anneaux des fonctions sur un recouvrement. Par exemple, si on considèdre le schéma $\mathbf{P}^1(k)$ où k est un corps, l'anneau des fonctions globales est k, c'est-à-dire le même que celui du faisceau constant k sur $\mathbf{P}^1(k)$.

1.2 Le procédé de recollement

On cite le théorème donné par Chevalley (pp. 98 à 109).

Théorème 6 (Recollements de faisceaux)

- *Soit I un ensemble d'indices et $\mathfrak{C}$ une catégorie fixée.*
- *Pour tout $i \in I$, soit $(X_i, \mathcal{O}_i)$ un espace topologique muni d'un faisceau $\mathcal{O}_i$ à valeurs dans $\mathfrak{C}$.*
- *Pour tous $i, j \in I$, soit $\Omega_j(i) \overset{\circ}{\hookrightarrow} X_i$ un ouvert, qu'on munit du faisceau restreint pour obtenir un espace $(\Omega_j(i), \mathcal{O}_i\mid_{\Omega_j(i)})$.*
- *Enfin, pour tous $i, j \in I$, soit $\varphi_{i,j} : (\Omega_j(i), \mathcal{O}_i\mid_{\Omega_j(i)}) \to (\Omega_i(j), \mathcal{O}_j\mid_{\Omega_i(j)})$ un morphisme.*

On suppose que ces données vérifient :

H1 $\Omega_i(i) = X_i$ *et* $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$

H2 $\varphi_{ij}\Big(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)\Big) \subset \Omega_i(j) \cap \Omega_k(j)$

H3 (conditions de recollement) *Sur* $\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$, *on a* $\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$

Alors, il existe un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ muni d'un faisceau à valeurs dans $\mathfrak{C}$, recouvert par des ouverts $\widetilde{X_i} \overset{\circ}{\hookrightarrow} X$ et des isomorphismes

$$\psi_i : (X_i, \mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} (\widetilde{X}_i, \mathcal{O}\mid_{\widetilde{X}_i}) \overset{\circ}{\hookrightarrow} (X, \mathcal{O})$$

qui vérifient :

C1 $X = \bigcup_{i \in I} \widetilde{X}_i$

C2 *Au-dessus de* $\Omega_j(i)$, *on a* $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$. *C'est-à-dire que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X_i & \Omega_j(i) \arrow[l, hook', "\circ"'] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\
 & & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j \\
X_j & \Omega_i(j) \arrow[l, hook', "\circ"'] \arrow[ur, "\psi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

C3 $\left\{\begin{array}{l} x \in X_i \\ y \in X_j \\ \psi(x) = \psi(y) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad x \in \Omega_j(i)$ *et* $y = \varphi_{ij}(x)$

C'3 $\psi_i\Big(\Omega_j(i)\Big) = \psi_j\Big(\Omega_i(j)\Big) = \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j$

Enfin, il y a unicité à un unique isomorphisme près (compatible avec les donnnées).

2 Recollement de morphismes

Dans cette partie, on va énoncer un théorème beaucoup moins compliqué.

2.1 Restriction d'un morphisme

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $U \hookrightarrow X$ un ouvert et $(S, \mathcal{O}_S)$ un autre espace annelé.

Soit $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ un morphisme d'espaces annelés.

Alors, on peut définir $\varphi|_U : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (S, \mathcal{O}_S)$.

Ensemblistement et topologique, c'est comme d'habitude.

Du point de vue faisceautique, si $V \hookrightarrow S$ est un ouvert, on doit définir

$$(\varphi|_U)^{\#}_V : \mathcal{O}_S(V) \to (\mathcal{O}_X|_U)(V).$$

On le définit de façon à ce que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_S(V) \arrow[r, "(\varphi|_U)^{\#}_V"] \arrow[dr, "\varphi^{\#}_V"'] & (\mathcal{O}_X|_U)(V) \\
& \mathcal{O}_X(V) \arrow[u, "\rho_{V \to V \cap U}"']
\end{tikzcd}$$

2.2 Recollement

Théorème 7 *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un autre espace annelé.*

Soient $\varphi_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \to (S, \mathcal{O}_S)$ des morphismes tels que, pour tous $i, j \in I$, $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$.

Alors, il existe un unique $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ tel que pour tout $i \in I$, $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$.

Démonstration : Ensemblistement, c'est facile de définir φ : si $x \in X$, alors, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et on définit $\varphi(x) = \varphi_i(x)$. Cette définition ne dépend pas du i choisi.

La fonction φ est alors bien continue.

Concernant les faisceaux : soit $U \hookrightarrow S$. On cherche à construire $\varphi^{\#}_U : \mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_X(U)$. Soit donc $f \in \mathcal{O}_S(U)$. Notons que $\bigcup_{i \in I} \varphi_i^{-1}(U) = \varphi^{-1}(U)$.

On peut alors considérer pour tout $i \in I$, $g_i = (\varphi_i)^{\#}_U(f)$. Les g_i se recollent : le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_X|_{U_i}\,({\varphi_i}^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho_{U_i \cap {\varphi_i}^{-1}(U) \to U_i \cap U_j \cap {\varphi_i}^{-1}(U)}"] \\
\mathcal{O}_S(U) \arrow[ur, bend left, "{\varphi_i}^{\#}_U"] \arrow[r, "(\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{\#}_U", "(\varphi_j|_{U_i \cap U_j})^{\#}_U"'] \arrow[dr, bend right, "{\varphi_j}^{\#}_U"'] & \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}\,(\varphi^{-1}(U)) \\
& \mathcal{O}_X|_{U_j}\,({\varphi_j}^{-1}(U)) \arrow[u, "\rho_{U_j \cap {\varphi_j}^{-1}(U) \to U_i \cap U_j \cap {\varphi_j}^{-1}(U)}"']
\end{tikzcd}$$

commute.

Ainsi, si on note $U_i' = U_i \cap \varphi^{-1}(U)$, on a $g_i|_{U_i' \cap U_j'} = g_j|_{U_j' \cap U_i'}$.

Donc, les g_i se recollent en une fonction $g \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$, qui sera $\varphi_U^{\#}(f) = g$.

On vérifie que ces fonctions constituent bien une transformation naturelle et qu'il y a unicité. ■