Recollement d'espaces topologiques

Colas Bardavid

mercredi 26 mai 2005

Table des matières

Résultats

Lemme 0.1 *Soit* $X \xrightarrow{f} Y$ *un homéomorphisme. Soit* $A \subset X$. *Alors,* $A \xrightarrow{f|_A} f(A)$ *est un homéomorphisme*

Rappel 0.2 *On est dans la situation suivante :* $X \xrightarrow{\pi} Y := X/\sim$ *est la projection canonique de* X *sur l'espace quotient. Alors,*

$$\pi \text{ est continue.}$$
$$O \text{ ouvert de } Y \iff \pi^{-1}(O) \text{ ouvert de } X.$$
$$F \text{ fermé de } Y \iff \pi^{-1}(F) \text{ fermé de } X.$$
$$f : Y \to Z \text{ continue} \iff f \circ \pi : X \to Z \text{ continue.}$$

Proposition 0.3 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X$ *est un homéomorphisme sur son image, qui est ouverte dans* X.

Proposition 0.4 $O \subset X$ *est un ouvert si, et seulement si, pour tout* $\alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(O)$ *est un ouvert de* X_α.

Proposition 0.5 *Soit* Y *un espace topologique quelconque et soit* $g : X \to Y$ *une application. Alors,* g *est continue si, et seulement si, pour tout* α, $g_\alpha = g \circ f_\alpha : X_\alpha \to Y$ *est continue.*

Proposition 0.6 *Soit* Y *un espace topologique quelconque.*

Se donner une fonction continue $g : X \to Y$, *c'est se donner une famille de fonctions continues* $g_\alpha : X_\alpha \to Y$ *telles que :*

$$g_\alpha \mid_{U_\beta(\alpha)} = g_\beta \mid_{U_\alpha(\beta)} \circ \varphi_{\alpha,\beta}.$$

Questions en suspens et travail à faire

Projet 0.7 *Réfléchir au recollement dans un cadre plus général (aller voir Bourbaki ?).*

1 Cas général

1.1 Données

Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces topologiques et $O_\beta(\alpha) \overset{\circ}{\hookrightarrow} X_\alpha$ pour tous α et β.

On peut faire le recollement dans un cadre plus général à mon avis, mais ici, on se limite à des recollements sans bavures.

On va recoller X_α et X_β selon les ouverts $O_\beta(\alpha)$ et $O_\alpha(\beta)$.

Ainsi, on suppose que $O_\alpha(\alpha) = X_\alpha$.

On se donne pour tout (α, β) un isomorphisme (dans la catégorie **Top**) $\varphi_{\alpha,\beta} : O_\beta(\alpha) \to O_\alpha(\beta)$. On demande évidemment que $\varphi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{Id}_{X_\alpha}$.

On demande aussi des conditions de recollements. Partons d'un point $x \in O_\alpha(\gamma) \cap O_\beta(\gamma)$. Il va être identifié à $\varphi_{\gamma,\alpha}(x) \in O_\gamma(\alpha)$. Mais il va être identifié aussi à $y = \varphi_{\gamma,\beta}(x) \in O_\gamma(\beta)$. On veut que notre recollement soit bien organisé ! Donc, on veut que ce point y soit aussi identifié, *via* $\varphi_{\beta,\alpha}$, à $\varphi_{\gamma,\alpha}(x)$. Donc en particulier, $\varphi_{\gamma,\alpha}(x) \in O_\beta(\alpha)$.

Ainsi, on va déjà imposer que $\varphi_{\gamma,\alpha}(O_\alpha(\gamma) \cap O_\beta(\gamma)) \subset O_\gamma(\alpha) \cap O_\beta(\alpha)$. Ceci impose en fait qu'il y a égalité (prendre $\varphi_{\alpha,\gamma}$).

En plus, comme on l'a dit, on veut que $\varphi_{\gamma,\alpha}$ et $\varphi_{\beta,\alpha} \circ \varphi_{\gamma,\beta}$ coïcident sur $O_\alpha(\gamma) \cap O_\beta(\gamma)$ (où elles sont bien définies d'après les conditions précédentes.

Or, on a le

Lemme 1.1 *Soit* $X \xrightarrow{f} Y$ *un homéomorphisme. Soit* $A \subset X$*. Alors,* $A \xrightarrow{f|_A} f(A)$ *est un homéomorphisme*

Démonstration : D'abord, $A \xrightarrow{f|_A} f(A)$ est bien une bijection. Ensuite, si O est un ouvert de X, $f(O)$ est un ouvert de Y et on a $f(O \cap A) = f(O) \cap f(A)$ (bijectivité de f). Donc $f|_A$ est une application ouverte. On montre pareil qu'elle est continue. ■

On déduit de tout ça :

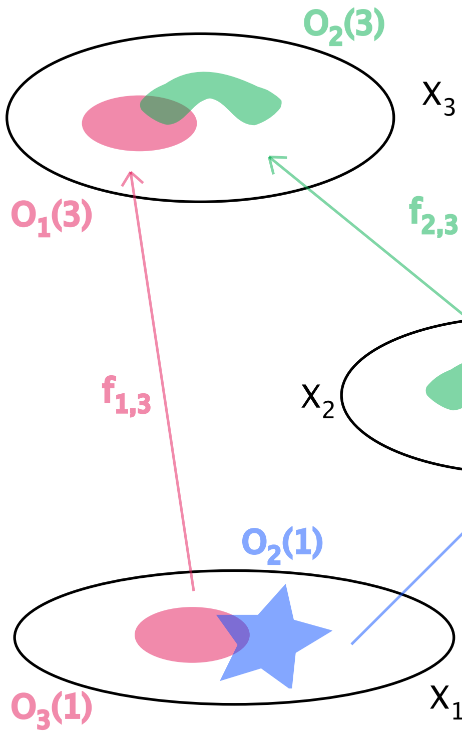

FIG. 1 – Conditions de recollement (ici, elles ne sont pas satisfaites)

Hypothèses 1.2 (Conditions de recollement) *On impose que :*

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in A, \quad O_\alpha(\gamma) \cap O_\beta(\gamma) \xrightarrow[\sim]{\varphi_{\gamma,\alpha}} O_\gamma(\alpha) \cap O_\beta(\alpha)$$

soit un homéomorphisme et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} O_\gamma(\alpha) \cap O_\beta(\alpha) & \\ & O_\gamma(\beta) \cap O_\alpha(\beta) \arrow[ul, "\varphi_{\beta,\alpha}"'] \\ O_\alpha(\gamma) \cap O_\beta(\gamma) \arrow[uu, "\varphi_{\gamma,\alpha}"] \arrow[ur, "\varphi_{\gamma,\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.
Dans la pratique, il suffit de vérifier que $\varphi_{\gamma,\alpha}(O_\alpha(\gamma) \cap O_\beta(\gamma)) \subset O_\gamma(\alpha) \cap O_\beta(\alpha)$ *et que sur cette intersection,* $\varphi_{\gamma,\alpha}$ *et* $\varphi_{\beta,\alpha} \circ \varphi_{\gamma,\beta}$ *coïcident.*

En particulier, sur $O_\alpha(\alpha)\cap O_\beta(\alpha)=O_\beta(\alpha)$, on veut que $\varphi_{\alpha,\alpha}$ coïncide avec $\varphi_{\beta,\alpha}\circ\varphi_{\alpha,\beta}$. C'est-à-dire que $\varphi_{\alpha,\beta}$ et $\varphi_{\beta,\alpha}$ soient des isomorphismes réciproques.

1.2 Construction du recollement

D'abord, on se place sur l'espace topologique $X=\coprod_{\alpha\in A}X_\alpha$, qu'on décrit ensemblistement comme $\bigcup_{\alpha\in A}\{\alpha\}\times X_\alpha$. Une partie U de cet ensemble est ouverte si, et seulement si, son intersection avec tous les X_α est ouverte (c'est-à-dire, $\{x\in X_\alpha \mid (\alpha,x)\in U\}$).

On a des isomorphismes entre X_α et $\{\alpha\}\times X_\alpha$ et cet objet est la somme des X_α dans **Top**.

Maintenant, on quotiente X par la bonne relation d'équivalence. On dit que (α,x) et (β,y) sont équivalents si, et seulement si, ($x\in U_\beta(\alpha)$ et $\varphi_{\alpha,\beta}(x)=y$) ou ($\alpha=\beta$ et $x=y$).

Fait 1.3 *C'est bien une relation d'équivalence.*

Démonstration : On ne traite que les cas non triviaux.

Pour la réflexité, c'est ok.

Pour la symétrie, c'est ok, cela vient de $\varphi_{\alpha,\beta}=(\varphi_{\beta,\alpha})^{-1}$.

Pour la transitivité : si $(\alpha,x)\sim(\beta,y)$ et $(\beta,y)\sim(\gamma,z)$, alors $\varphi_{\alpha,\beta}(x)=y$ donc $y\in O_\alpha(\beta)$; aussi, $\varphi_{\beta,\gamma}(y)=z$ donc $y\in O_\gamma(\beta)$. Donc $y\in O_\alpha(\beta)\cap O_\gamma(\beta)$. Or, $\varphi_{\beta,\gamma}(O_\alpha(\beta)\cap O_\gamma(\beta))=O_\beta(\gamma)\cap O_\alpha(\gamma)$. Et, $\varphi_{\beta,\gamma}(y)=\varphi_{\alpha,\gamma}(\varphi_{\beta,\alpha}(y))=z=\varphi_{\alpha,\gamma}(x)$. Ceci montre la transitivité. ■

Dès lors, on pose :

Définition 1.4 *Le recollement des X_α selon les $\varphi_{\alpha,\beta}$ est l'espace topologique $\coprod_\alpha X_\alpha/\sim$.*

1.3 Rappels sur la topologie quotient

Voir [Paulin, p. 11].

Rappel 1.5 *On est dans la situation suivante : $X\xrightarrow{\pi}Y:=X/\sim$ est la projection canonique de X sur l'espace quotient. Alors,*

$$\pi \text{ est continue.}$$

$$O \text{ ouvert de } Y \iff \pi^{-1}(O) \text{ ouvert de } X.$$

$$F \text{ fermé de } Y \iff \pi^{-1}(F) \text{ fermé de } X.$$

$$f:Y\to Z \text{ continue} \iff f\circ\pi:X\to Z \text{ continue.}$$

1.4 Propriétés du recollement

1.4.1 Comparaison entre les X_α et le recollement

On a une application naturelle i_α (un isomorphisme sur son image) de X_α dans $\coprod_\alpha X_\alpha$. En composant par π, on obtient une application naturelle de X_α vers le recollé, qu'on notera X :

$$X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X\,.$$

Proposition 1.6 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X$ *est un homéomorphisme sur son image, qui est ouverte dans* X.

Remarque : C'est le seul endroit où l'on utilise le fait que les $\varphi_{\alpha,\beta}$ sont des homéomorphismes et pas juste des applications.

Démonstration : D'abord, f_α est continue.

Montrons que $\mathrm{Im}\, f_\alpha$ est un ouvert. Il suffit de vérifier que $\pi^{-1}\left(\mathrm{Im}\, f_\alpha\right)$ est un ouvert de $\coprod_\alpha X_\alpha$. Donc, il suffit de vérifier que pour tout β, $\left\{x \in X_\beta \mid (\beta, x) \in \pi^{-1}\left(\mathrm{Im}\, f_\alpha\right)\right\}$ est un ouvert de X_β. Mais, $\left\{x \in X_\beta \mid (\beta, x) \in \pi^{-1}\left(\mathrm{Im}\, f_\alpha\right)\right\} = \{x \in X_\beta \mid \pi(\beta, x) \in \mathrm{Im}\, f_\alpha\}$. Donc, cet ensemble est $\{x \in X_\beta \mid \exists y \in X_\alpha, \pi(\beta, x) = \pi(\alpha, y)\}$. Donc, c'est $\{x \in X_\beta \mid \exists y \in X_\alpha, x \sim y\}$. Cet ensemble est exactement $O_\alpha(\beta)$ qui est bien ouvert.

Ensuite, soit U un ouvert de X_α. Est-ce que $\pi \circ i_\alpha(U) \subset X$ est un ouvert de X ? Pour le vérifier, on fait pareil. Finalement, on trouve que c'est un ouvert car $\varphi_{\alpha,\beta}(U \cap O_\beta(\alpha))$ est un ouvert de X_β. ■

1.4.2 Ouverts du recollement

Voici une caractérisation des ouverts du recollement :

Proposition 1.7 $O \subset X$ *est un ouvert si, et seulement si, pour tout* $\alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(O)$ *est un ouvert de* X_α.

Démonstration : Par définition de la topologie quotient, une partie O de X est ouverte si, et seulement si, $\pi^{-1}(O)$ est ouverte dans $\coprod_\alpha X_\alpha$. Par définition de la topologie somme, $\pi^{-1}(O)$ est ouverte si, et seulement si, pour tout α, $i_\alpha^{-1}(\pi^{-1}(O)) = f_\alpha^{-1}(O)$ est ouverte dans X_α. ■

1.4.3 Caractérisation de la continuité des fonctions qui partent du recollement X

Voici une caractérisation des fonctions continues qui partent de X.

Proposition 1.8 *Soit* Y *un espace topologique quelconque et soit* $g : X \to Y$ *une application. Alors,* g *est continue si, et seulement si, pour tout* α, $g_\alpha = g \circ f_\alpha : X_\alpha \to Y$ *est continue.*

Démonstration : D'après les propriétés de la topologie quotient, g est continue si, et seulement si, $g \circ \pi : \coprod X_\alpha \to Y$ est continue. Puis, d'après les propriétés de la topologie somme, $g \circ \pi$ est continue si, et seulement si, pour tout $\alpha \in A$, $g \circ \pi \circ i_\alpha = g \circ f_\alpha : X_\alpha \to Y$ est continue. ■

1.4.4 Définition des fonctions qui partent du recollement X

Comment construire une fonction continue qui part de X ?

Proposition 1.9 *Soit Y un espace topologique quelconque.*

Se donner une fonction continue $g : X \to Y$, c'est se donner une famille de fonctions continues $g_\alpha : X_\alpha \to Y$ telles que :

$$g_\alpha \mid_{U_\beta(\alpha)} = g_\beta \mid_{U_\alpha(\beta)} \circ \varphi_{\alpha,\beta}.$$

Démonstration : D'abord, si $g : X \to Y$ est continue, alors on considère $g_\alpha = g \circ f_\alpha : X_\alpha \to Y$. Soit $x \in U_\beta(\alpha)$. Le point $i_\alpha(x) = (\alpha, x)$ est équivalent à $(\beta, \varphi_{\alpha,\beta}(x)) = i_\beta(\varphi_{\alpha,\beta}(x))$. Ils sont donc envoyés sur le même point par π : $f_\alpha(x) = f_\beta(\varphi_{\alpha,\beta}(x))$. En composant par g, on obtient la condition souhaitée.

Dans l'autre sens, supposons qu'on a la famille $g_\alpha : X_\alpha \to Y$ telles que :

$$g_\alpha \mid_{U_\beta(\alpha)} = g_\beta \mid_{U_\alpha(\beta)} \circ \varphi_{\alpha,\beta}.$$

On cherche alors à construire la fonction g. On définit g comme la fonctions somme des g_α : $g((\alpha, x)) = g_\alpha(x)$. Cette fonction est continue car quand on regarde la fonction qu'elle induit sur X_α, c'est g_α et elle est continue.

On vérifie ensuite que cette fonction passe au quotient (c'est fait pour). Si $(\alpha, x) \sim (\beta, y)$, c'est-à-dire $\varphi_{\alpha,\beta}(x) = y$, alors $g((\alpha, x)) = g_\alpha(x) = g_\alpha \mid_{U_\beta(\alpha)} (x) = g_\beta \mid_{U_\alpha(\beta)} \circ \varphi_{\alpha,\beta}(x) = g_\beta \mid_{U_\alpha(\beta)} (y) = g_\beta(y) = g((\beta, y))$. Donc elle passe au quotient, on obtient $g' : X \to Y$; elle est continue car composée par π, c'est g, qui est continue. ■

2 Recollement dans un cas plus simple

On décrit ici un cas plus simple où on n'a pas besoin de vérifier les conditions de recollement.

2.1 Données

On part d'un espace topologique X sur lequel on va recoller d'autres espaces $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.

On se donne U un ouvert de X.

Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un ouvert $U_\alpha \underset{o}{\hookrightarrow} X_\alpha$ et un homéomorphisme $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U$.

On va recoller les X_α sur X suivant les homéomorphisme φ_α.

2.2 Construction du recollement

On note $X = X_0$, $U_0 = U$ et $\varphi_0 = \mathrm{Id}_{U_0}$.

Comme précédemment, on part de $Y = X_0 \sqcup \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$, qu'on quotiente par la relation $(\alpha, x) \sim (\beta, y)$ si, et seulement si, ($x \in U_\alpha$, $y \in U_\beta$ et $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(y)$) ou ($\alpha = \beta$ et $x = y$).

Fait 2.1 *$\sim$ est bien une relation d'équivalence.*

Démonstration : La relation est bien réflexive.
La relation est bien symétrique.
La relation est bien transitive. ■

Définition 2.2 *Le recollement des X_α sur X le long des φ_α est $\left(X_0 \sqcup \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha\right) / \sim$. On le note Y.*

2.3 Propriétés du recollement

2.3.1 Injections ouvertes des X_α dans Y.

On a des applications canoniques $i_\alpha : X_\alpha \to X_0 \sqcup \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$, qui sont des homéomorphismes sur leur image, qui est ouverte.

On a une application canonique, la projection, de $X_0 \sqcup \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ dans Y, qu'on note π.

On note $f_\alpha = \pi \circ i_\alpha$.

Proposition 2.3 *$f_\alpha : X_\alpha \to Y$ est un homéomorphisme sur son image, qui est ouverte.*

2.3.2 Ouverts du recollement

Proposition 2.4 *$O \subset Y$ est un ouvert si, et seulement si, pour tout $\alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(O)$ est un ouvert de X_α.*

2.3.3 Caractérisation de la continuité des fonctions qui partent du recollement Y

Proposition 2.5 *Soit Z un espace topologique quelconque et soit $g : X \to Z$ une application. Alors, g est continue si, et seulement si, pour tout α, $g_\alpha = g \circ f_\alpha : X_\alpha \to Y$ est continue.*

2.3.4 Définition des fonctions qui partent du recollement Y

Comment construire une fonction continue qui part de Y ?

Proposition 2.6 *Soit Z un espace topologique quelconque.*

Se donner une fonction continue $g : X \to Z$, c'est se donner une famille de fonctions continues $g_\alpha : X_\alpha \to Z$ telles que :

$$g_\alpha\,|_{U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1} = g_\beta\,|_{U_\beta} \circ \varphi_\beta^{-1} : U \to Z.$$

Références

[Paulin] Frédréric Paulin, *Précis de topologie générale*, disponible sur Internet.