

Recollements d'objets universels

Colas Bardavid

samedi 9 juillet 2005

Table des matières

1	Introduction	2
2	Le procédé de recollement	2
3	Les hypothèses <i>ad hoc</i>	3
3.1	Commentaires	3
3.2	Cadre général	4
3.3	\mathcal{C}_1 est une sous-catégorie quelconque de TopAnn	4
3.4	\mathcal{C}_2 est une sous-catégorie quelconque de TopAnn stable par recollement, etc.	4
3.5	(P) est une propriété portant sur les morphismes d'espaces annelés, stable par recollement, etc.	4
3.6	Définition de la X -admissibilité	5
4	Énoncé du problème dont on cherche une solution universelle	5
5	Énoncé du théorème de recollement des objets universels	6
6	Démonstration du théorème de recollement des objets universels	6
6.1	Les ouverts admissibles d'un espace qui a une solution universelle ont une solution universelle	6
6.2	Recollement des objets universels	7
6.3	Recollement des morphismes structuraux	8
6.4	Vérification que \tilde{X} est un objet universel pour X	9
7	Applications	11
7.1	Schéma réduit associé à un schéma	11
7.1.1	Données et vérifications des hypothèses <i>ad hoc</i>	11
7.1.2	Tout schéma affine admet un schéma réduit associé	11
7.1.3	Cas général	12
7.2	Normalisation	12
7.2.1	Données et vérification des données <i>ad hoc</i>	12
7.2.2	X -admissibilité	13
7.2.3	Tout schéma affine admet une normalisation	13
7.2.4	Cas général	14
8	Addendum pour une démonstration plus rapide et moins répétitive	14

1 Introduction

On s'intéresse à la construction d'objets universels.

Par exemple, considérons un schéma affine $S = \text{Spec } A$ non-forcément réduit. On peut lui associer un schéma réduit $\tilde{S} = \text{Spec } \tilde{A}$ qui est universel, dans le sens où c'est le plus petit schéma réduit au-dessus de S qui garde le plus d'information possible sur S . Pour ce faire, il suffit de prendre l'anneau $\tilde{A} = A/\mathcal{N}$ où \mathcal{N} est l'idéal des éléments nilpotents de A .

Dans ce cas, la construction est très simple. D'ailleurs, pour d'autres constructions (comme la normalisation, cf. partie 11), mais toujours dans le cas affine, on peut trouver l'objet universel cherché en faisant une construction d'algèbre commutative.

Le problème qu'on se pose, c'est de trouver cet objet universel quand S n'est plus forcément un schéma affine.

Ce problème est résolu dans EGA en considérant qu'un schéma au-dessus de S est une \mathcal{O}_S -algèbre et en faisant de l'algèbre commutative au-dessus de chaque ouvert affine. Cette méthode a le mérite d'être générale et rapide. Cependant, on peut se demander comment se construit le faisceau à partir du préfaisceau défini sur une base d'ouverts, et notamment si certaines fonctions sont tuées (cf. [EGA2, §6.1, §6.3]).

La solution qu'on a choisie pour résoudre ce problème est de construire les objets universels sur des ouverts simples, ensuite de les recoller et enfin de vérifier que le recollement est encore solution universelle du problème. Cette solution s'inspire de la construction que Grothendieck fait du produit fibré dans [EGA1, §3].

On a cherché à effectuer ce programme dans le cadre le plus général possible, qui est délimité par des hypothèses *ad hoc*¹.

2 Le procédé de recollement

On rappelle les hypothèses qu'il suffit de vérifier pour recoller des espaces annelés ; on cite le théorème donné par Claude Chevalley dans [Che, pp. 98 à 109].

¹À propos de ces hypothèses *ad hoc*, voir les commentaires de la sous-partie 3.1.

Théorème 1 (Recollements de faisceaux)

- Soit I un ensemble d'indices et \mathcal{C} une catégorie fixée.
- Pour tout $i \in I$, soit (X_i, \mathcal{O}_i) un espace topologique muni d'un faisceau \mathcal{O}_i à valeurs dans \mathcal{C} .
- Pour tous $i, j \in I$, soit $\Omega_j(i) \subset_{\mathcal{C}} X_i$ un ouvert, qu'on munit du faisceau restreint pour obtenir un espace $(\Omega_j(i), \mathcal{O}_i|_{\Omega_j(i)})$.
- Enfin, pour tous $i, j \in I$, soit $\varphi_{i,j} : (\Omega_j(i), \mathcal{O}_i|_{\Omega_j(i)}) \rightarrow (\Omega_i(j), \mathcal{O}_j|_{\Omega_i(j)})$ un morphisme.

On suppose que ces données vérifient :

H1 $\Omega_i(i) = X_i$ et $\varphi_{ii} = \text{Id}_{X_i}$

H2 $\varphi_{ij}(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)) \subset \Omega_i(j) \cap \Omega_k(j)$

H3 (conditions de recollement) Sur $\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$, on a $\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$

Alors, il existe un espace topologique (X, \mathcal{O}) muni d'un faisceau à valeurs dans \mathcal{C} , recouvert par des ouverts $\tilde{X}_i \subset_{\mathcal{C}} X$ et des isomorphismes

$$\psi_i : (X_i, \mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} (\tilde{X}_i, \mathcal{O}|_{\tilde{X}_i}) \subset_{\mathcal{C}} (X, \mathcal{O})$$

qui vérifient :

C1 $X = \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$

C2 Au-dessus de $\Omega_j(i)$, on a $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$. C'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i \longleftarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega_j(i) & \xrightarrow{\psi_i} & \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j \\ & \searrow \varphi_{ij} & \\ X_j \longleftarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega_i(j) & \xrightarrow{\psi_j} & \end{array} \quad \text{commute.}$$

C3 $\begin{cases} x \in X_i \\ y \in X_j \\ \psi(x) = \psi(y) \end{cases} \implies x \in \Omega_j(i) \text{ et } y = \varphi_{ij}(x)$

C3bis $\psi_i(\Omega_j(i)) = \psi_j(\Omega_i(j)) = \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j$

Enfin, il y a unicité à un unique isomorphisme près (compatible avec les données).

3 Les hypothèses ad hoc

3.1 Commentaires

Dans cette partie, on introduit les objets qui servent à formaliser la question qu'on se pose et la réponse qu'on lui donne.

On a cherché à exprimer le résultat sous sa forme la plus générale, ce qui nous a amené à formuler des hypothèses ad hoc, très techniques mais pas très naturelles.

Plutôt que le cadre technique dans lequel on se place, il vaut mieux retenir de la solution qu'on donne le procédé de résolution suivi.²

En fait, on a donné ces hypothèses ad hoc pour assurer la validité mathématique de la généralisation du procédé mais on aurait pu résoudre le problème « à la physicienne », en laissant au lecteur le soin de rechercher les hypothèses qui lui permettent de produire une démonstration « à la mathématicienne ».

²Pour ne pas passer à côté de l'idée de la démonstration, qui est simple, il ne faut pas prendre trop au sérieux toutes ces hypothèses.

3.2 Cadre général

On se place dans le cadre des espaces annelés, ce qui permet d'englober à la fois les espaces type schémas, type variétés analytiques ou différentielles et les espaces type topologiques.

On note **TopAnn** la catégorie des espaces annelés.

On note **Sch** la catégorie des schémas.

3.3 \mathcal{C}_1 est une sous-catégorie quelconque de TopAnn

C'est la catégorie des objets auxquels on cherche à associer une solution universelle du problème considéré.

Par exemple, pour le problème du sous-schéma réduit associé à un schéma S , vu qu'on cherche à résoudre ce problème pour tout schéma, on prendra $\mathcal{C}_1 = \mathbf{Sch}$.

En revanche, pour le problème de la normalisation, vu qu'on ne cherche à normalisation que les schémas intègres, on prend pour \mathcal{C}_1 la catégorie des schémas intègres.

3.4 \mathcal{C}_2 est une sous-catégorie quelconque de TopAnn stable par recollement et isomorphisme et dont les inclusions entre objets de \mathcal{C}_2 sont toujours de morphismes

C'est dans cette catégorie qu'on code la propriété universelle.

On demande la stabilité par recollement car on va construire des objets de \mathcal{C}_2 par recollements d'objets de \mathcal{C}_2 plus élémentaires. Cela signifie que le recollement d'objets de \mathcal{C}_2 le long d'ouverts qui sont dans \mathcal{C}_2 est dans \mathcal{C}_2 et que le recollement de morphismes $Y_i \rightarrow Z$ de \mathcal{C}_2 est encore dans \mathcal{C}_2 .

On demande la stabilité par isomorphisme c'est-à-dire que si $Y \in \text{ob}(\mathcal{C}_2)$ et Y' est isomorphe à Y en tant qu'espace annelé, alors, $Y' \in \text{ob}(\mathcal{C}_2)$. On a besoin de faire cette hypothèse car le théorème de recollement nous donne des isomorphismes abstraits et qu'on désire, après recollement, pouvoir travailler avec la même souplesse.

Enfin, si $U \xrightarrow{\mathcal{C}_2} X$ sont deux objets de \mathcal{C}_2 , on demande que l'inclusion soit un morphisme de \mathcal{C}_2 .

Généralement, \mathcal{C}_2 sera une sous-catégorie de \mathcal{C}_1 : dans ce cas, un objet de \mathcal{C}_2 dont on cherche le représentant universel sera sa propre solution.

Par exemple, si on est dans le cadre des schémas et qu'on cherche le schéma réduit associé à un schéma S , on prendra pour \mathcal{C}_2 la sous-catégorie pleine de **Sch** dont les objets sont les schémas réduits.

Pour assurer la stabilité par recollement, il suffit que \mathcal{C}_2 soit *modélée* sur une catégorie de modèles ou que, moralement, \mathcal{C}_2 soit définie localement.

3.5 (P) est une propriété portant sur les morphismes d'espaces annelés, stable par recollement et isomorphisme

Ainsi, on s'intéresse aux « extensions » de S (un objet de \mathcal{C}_1) à valeurs dans \mathcal{C}_2 :

ce sont les $\begin{array}{c} X \\ \downarrow^p \\ S \end{array}$, avec X objet de \mathcal{C}_2 .

On impose que p vérifie la propriété (P) et que cette propriété (P) soit stable par recollement : si $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$, si $\begin{array}{c} Y_i \\ \downarrow^{p_i} \\ S \end{array}$ vérifie (P) et que $p_i|_{Y_i \cap Y_j} = p_j|_{Y_i \cap Y_j}$ alors, p , le

recolle des p_i vérifie (P). La stabilité par isomorphisme signifie que si $\begin{array}{c} X \\ \downarrow^p \\ S \end{array}$ vérifie (P)

avec $X \in \text{ob}(\mathcal{C}_2)$ et que $X \simeq X'$ en tant qu'espaces annelés, alors, le transport de p à X' via l'isomorphisme vérifie encore (P)

Généralement, on impose, entre autres choses, que la flèche p soit un morphisme de \mathcal{C}_1 .

On code éventuellement une partie de la propriété universelle en demandant que p vérifie la propriété **(P)**.

Par exemple, pour le problème de la normalisation d'un schéma intègre, **(P)** est la propriété d'être un morphisme de schémas dominant.

3.6 Définition de la X -admissibilité

Au cours de la résolution, on aura besoin à certains endroits de faire des hypothèses sur certains ouverts U de X , un objet de \mathcal{C}_1 .

En gros, dire que $U \hookrightarrow X$ est admissible, c'est dire que U se comporte bien par rapport au problème universel considéré. Dans la pratique, tous les ouverts sont admissibles.

Précisément, si X est un objet de \mathcal{C}_1 et si U est un ouvert de X , on dira que U est

X -admissible si $\forall \begin{array}{c} Y \\ \downarrow p \\ X \end{array} \in \mathcal{C}_X$,

(Adm 1) $\begin{array}{c} p^{-1}(U) \\ \downarrow p \\ U \end{array} \in \mathcal{C}_U$, ce qui implique que $U \in \mathcal{C}_1$ et que $p^{-1}(U) \in \mathcal{C}_2$

(Adm 2) $\begin{array}{c} p^{-1}(U) \\ \downarrow p \\ U \\ \downarrow \phi \\ X \end{array} \in \mathcal{C}_X$

(Adm 3) $\forall \begin{array}{c} Z \\ \downarrow q \\ X \end{array} \in \mathcal{C}_X$ et $\forall f : Z \xrightarrow{f} Y$ avec $f(Z) \subset p^{-1}(U)$, on a $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Z, Y) \iff$

$f|_U \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Z, U)$ et $f = i \circ f|_U$ (on a noté $Z \xrightarrow{f|_U} U \xrightarrow{i} Y$).

4 Énoncé du problème dont on cherche une solution universelle

Soit X un objet de \mathcal{C}_1 .

On note \mathcal{C}_X la catégorie dont les objets sont les flèches $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow p \\ X \end{array}$ où Y est un objet de \mathcal{C}_2 et où p vérifie la propriété **(P)**. On appellera X -objets les objets de \mathcal{C}_X et *morphisme structural* du X -objet le morphisme p . Les flèches de \mathcal{C}_X entre $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow p \\ X \end{array}$ et $\begin{array}{c} Y' \\ \downarrow p' \\ X \end{array}$ sont les

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Y, Y')$ qui font commuter le diagramme $\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$.

Notre problème, c'est de trouver un objet final de \mathcal{C}_X .

C'est-à-dire, on cherche un objet $\begin{array}{c} \tilde{X} \\ \downarrow p \\ X \end{array}$ dans \mathcal{C}_X tel que pour tout objet $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow q \\ X \end{array}$ de \mathcal{C}_X ,

il existe une unique flèche f telle que $\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\exists! f} & \tilde{X} \\ q \searrow & & \downarrow p \\ & & X \end{array}$.

Moralement, on dira aussi que \tilde{X} est une solution universelle du problème posé.

Un objet final est toujours unique à un unique isomorphisme près s'il existe. C'est cette propriété fondamentale qui nous permettra recoller les objets finaux entre eux.

On a déjà dit qu'il faut considérer un tel objet final comme « le » plus petit objet au-dessus de X ayant les propriétés voulues et contenant le plus d'informations possibles (non-redondantes et non-superflues par rapport à X).

5 Énoncé du théorème de recollement des objets universels

Théorème 2 (Recollement d'objets universels) Soit $X \in \text{ob}(\mathcal{C}_1)$ possédant un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que :

(h1) $\forall i \in I, U_i$ est X -admissible

(h2) $\forall i \in I, \mathcal{C}_{U_i}$ a un objet final

(h3) $\forall i, \forall j, \forall k, U_i \cap U_j \cap U_k$ est U_i -admissible

Alors, \mathcal{C}_X a un objet final.

Remarquons que l'hypothèse (h3) implique, en prenant $j = k$, que $U_i \cap U_j$ est U_i -admissible pour tous $i, j \in I$. De même, U_i est U_i -admissible.

6 Démonstration du théorème de recollement des objets universels

6.1 Les ouverts admissibles d'un espace qui a une solution universelle ont une solution universelle

Lemme 3 Soit $X \in \text{ob}(\mathcal{C}_1)$ qui est tel que \mathcal{C}_X admet un objet final \tilde{X} et soit $U \subseteq_{\mathcal{C}_1} X$ un ouvert X -admissible. On note $\tilde{U} := p^{-1}(U) \subseteq_{\mathcal{C}_1} \tilde{X}$.
Alors, \downarrow_p est un objet final de \mathcal{C}_U .

Démonstration : Soit $\downarrow_q \in \mathcal{C}_U$. Cela a bien un sens car $U \in \text{ob}(\mathcal{C}_1)$ d'après l'axiome (Adm 1) de la X -admissibilité.

D'après (Adm 2), $\downarrow_q \in \mathcal{C}_X$. D'après la propriété universelle, on a donc $f : Y \rightarrow X$

\tilde{X} qui fait commuter le diagramme $\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ q \searrow & & \downarrow p \\ & U & X \end{array}$. Or, pour tout $y \in Y, p(f(y)) = q(y) \in U$. Donc, $f(Y) \subset \tilde{U}$. Donc, d'après (Adm 3), $f|_{\tilde{U}} : Y \rightarrow \tilde{U}$ est bien une flèche

de \mathfrak{C}_2 . On vérifie alors que le diagramme $Y \begin{array}{c} \xrightarrow{f|_{\tilde{U}}} \tilde{U} \\ \searrow q \quad \downarrow p \\ U \end{array}$ commute.

Pour l'unicité, supposons qu'on ait deux flèches $f \neq g : Y \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \tilde{U} \\ \xrightarrow{g} \tilde{U} \\ \searrow q \quad \downarrow p \\ U \end{array}$. Alors, d'après

l'axiome **(Adm 3)**, les flèches f et g composées avec l'inclusion ouverte de \tilde{U} dans \tilde{X} sont des morphismes de \mathfrak{C}_2 et sont encore distinctes. Cependant, elles font encore

commuter le diagramme $Y \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X} \\ \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{X} \\ \searrow q \quad \downarrow p \\ X \end{array}$, ce qui contredit le caractère final de \tilde{X} . Donc,

les flèches f et g doivent être égales et le résultat annoncé est démontré. ■

Remarquons qu'il n'y a pas grand chose d'autre dans cette démonstration que les axiomes **(Adm 1, 2, 3)**. On a d'ailleurs pas utilisé toute la puissance des axiomes, puisqu'ils sont valables pour tout X -objet alors qu'on ne les a utilisés que pour le X -objet \tilde{X} . On les utilisera entièrement plus loin.

6.2 Recollement des objets universels

Dans les parties qui suivent, on se place dans le cadre du théorème : les U_i forment un recouvrement de X à valeur dans \mathfrak{C}_1 , les \mathfrak{C}_{U_i} admettent des objets finaux, qu'on

note $\begin{array}{c} \tilde{U}_i \\ \downarrow p_i \\ U_i \end{array}$, et les $U_i \cap U_j \cap U_k$ sont U_i -admissibles.

On note $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.

L'idée, c'est qu'on va recoller les \tilde{U}_i le long des « $\widetilde{U_i \cap U_j}$ » qui seront les images réciproques par les p_i des intersections ; grâce au lemme précédent, on sait que ces préimages sont des objets universels. Les isomorphismes de recollement seront alors les isomorphismes entre les objets universels pour un même problème. Les conditions de recollement sont satisfaites car il n'y a qu'un seul isomorphisme entre deux objets universels pour le même problème.

Soit $\Omega_j(i) = p_i^{-1}(U_{ij}) \hookrightarrow \tilde{U}_i$ (l'indice entre parenthèse indique dans quel espace vit l'objet). Grâce au lemme 3, et car d'après **(h3)**, qu'on a supposée, U_{ij} est U_i -

admissible, on sait que $\begin{array}{c} \Omega_j(i) \\ \downarrow p_i \\ U_{ij} \end{array}$ est un objet final de $\mathfrak{C}_{U_{ij}}$.

Comme les objets finaux sont uniques à un unique isomorphisme près, pour tous $i, j \in I$, il existe un unique $\varphi_{i,j} \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_2}(\Omega_j(i), \Omega_i(j))$ qui fasse commuter

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U}_i & \leftarrow \hookrightarrow \Omega_j(i) & \xrightarrow[\sim]{\varphi_{i,j}} & \Omega_i(j) \hookrightarrow & \tilde{U}_j \\ p_i \downarrow & \searrow p_i|_{U_{ij}} & & \swarrow p_j|_{U_{ij}} & \downarrow p_j \\ U_i & \longleftarrow \circ & U_i \cap U_j & \circ \longrightarrow & U_j \end{array}$$

Il nous faut maintenant vérifier que les hypothèses du théorème de recollement sont bien vérifiées. L'hypothèse **H1** est facilement vérifiée. Pour l'hypothèse **H2**, prenons $x \in \Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$; cela signifie que $p_i(x) \in U_{ijk}$. Comme le diagramme précédent commute, on a que $p_j(\varphi_{i,j}(x)) \in U_{ijk}$, ce qui signifie que $\varphi_{i,j}(x) \in \Omega_i(j) \cap \Omega_k(j)$ et l'hypothèse **H2** est donc vérifiée.

Pour l'hypothèse **H3**, c'est un peu plus long. D'abord, d'après **H2** on a

$$\varphi_{i,j}(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)) \subset \Omega_k(j) \cap \Omega_i(j).$$

Par ailleurs, par unicité de l'isomorphisme entre deux objets finaux, on a que $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,i} = \text{Id}_{\Omega_i(j)}$. Donc, on a aussi

$$\varphi_{i,j}(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)) \supset \Omega_k(j) \cap \Omega_i(j)$$

et finalement égalité : en notant $\Omega_{jk}(i) = \Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$, $\varphi_{i,j}$, restreint à $\Omega_{jk}(i)$ réalise un isomorphisme entre $\Omega_{jk}(i)$ et $\Omega_{ik}(j)$. Par ailleurs, $\Omega_{jk}(i) = p_i^{-1}(U_{ijk})$. Par conséquent, d'après le lemme 3 et comme U_{ijk} est un ouvert U_i -admissible (car on

suppose **(h3)**), $\downarrow_{p_i}^{U_{ijk}}$ est un objet final de $\mathfrak{C}_{U_{ijk}}$. Ainsi, par unicité de l'isomorphisme entre $\downarrow_{p_i}^{U_{ijk}}$ et $\downarrow_{p_j}^{U_{ijk}}$, on a que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi_{i,j} & & \\ & & \sim & & \\ \Omega_{jk}(i) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{i,j}(k) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{ik}(j) \\ & \searrow p_i & \downarrow p_k & \swarrow p_j & \\ & & U_{ijk} & & \end{array} \quad \text{commute.}$$

Ceci assure que l'hypothèse **H3** est vérifiée.

Ainsi, le procédé de recollement des faisceaux s'applique. On note \tilde{X} muni des ouverts \tilde{X}_i le recollé des \tilde{U}_i . Comme la catégorie \mathfrak{C}_2 est stable par recollement, \tilde{X} est un objet de \mathfrak{C}_2 . On note $\tilde{U}_i \xrightarrow{\sim} \tilde{X}_i \hookrightarrow \tilde{X}$ l'isomorphisme entre \tilde{U}_i et \tilde{X}_i que nous donne le recollement et qui nous assure que \tilde{X}_i est dans \mathfrak{C}_2 (cf. partie 3.4).

6.3 Recollement des morphismes structuraux

Maintenant qu'on dispose d'un espace \tilde{X} recouvert par des ouverts \tilde{X}_i isomorphes aux \tilde{U}_i , pour construire l'objet universel qu'on cherche, il faut munir \tilde{X} d'une structure de X -objet, c'est-à-dire d'un morphisme structural $\downarrow_{\tilde{p}}^{\tilde{X}}$. On sait déjà à quoi res-

semble ce morphisme structural restreint aux ouverts \tilde{X}_i : en gros, ce sont les p_i . Pour construire, \tilde{p} , on va recoller les p_i les uns aux autres en utilisant le procédé suivant de recollement des morphismes d'espaces annelés³ :

Théorème 4 Soient (Y, \mathcal{O}_Y) un espace annelé et $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Soit (S, \mathcal{O}_S) un autre espace annelé.

Soient $f_i : (V_i, \mathcal{O}_Y|_{V_i}) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ des morphismes tels que, pour tous $i, j \in I$, $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$.

Alors, il existe un unique $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ tel que pour tout $i \in I$, $f|_{V_i} = f_i$.

\tilde{X} est recouvert par les \tilde{X}_i et sur ces ouverts, on peut définir $\tilde{p}_i : \tilde{X}_i \rightarrow X$ par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{\sim} & \tilde{X}_i \\ & \searrow p_i & \downarrow \tilde{p}_i \\ & & U_i \\ & & \downarrow \phi \\ & & X \end{array}$$

³dont la démonstration n'est pas très compliquée.

Comme U_i est U_i -admissible, la composée de p_i avec l'inclusion vérifie encore la propriété **(P)**. Comme la propriété **(P)** est stable par isomorphisme, \tilde{p}_i vérifie la propriété **(P)**. Pour recoller les \tilde{p}_i , on doit vérifier certaines conditions de compatibilités, ce qu'on va faire grâce aux conclusions **C2** et **C3bis** du théorème de recollement.

La conclusion **C3bis** nous dit que $\varphi_i(\Omega_j(i)) = \varphi_j(\Omega_i(j)) = \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j$ et la conclusion **C2** nous dit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Omega_j(i) & \xrightarrow{\varphi_i} & \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j \\ \varphi_{i,j} \downarrow & & \uparrow \varphi_j \\ \Omega_i(j) & \xrightarrow{\varphi_j} & \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j \end{array}$$

commute. On peut donc inverser les flèches φ_i et φ_j restreintes aux ouverts $\Omega_j(i)$ et $\Omega_i(j)$, et on notera $\psi_j(i)$ et $\psi_i(j)$ les inverses. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

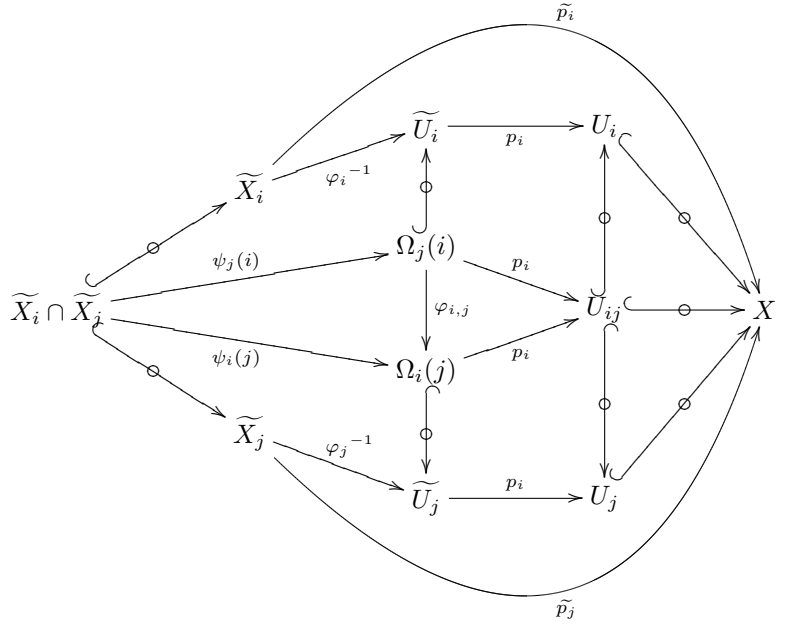
$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\psi_j(i)} & \Omega_j(i) \\ \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j & \xrightarrow{\sim} & \downarrow \varphi_{i,j} \\ & \xrightarrow{\psi_i(j)} & \Omega_i(j) \end{array}$$

Comme on sait par ailleurs, par définition que

$$\begin{array}{ccc} \Omega_j(i) & \xrightarrow{p_i} & U_{ij} \\ \varphi_{i,j} \downarrow & & \uparrow p_j \\ \Omega_i(j) & \xrightarrow{p_j} & U_{ij} \end{array}$$

commute, on en

déduit que le diagramme suivant commute :



Ce qui signifie simplement que $\tilde{p}_i|_{\tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j} = \tilde{p}_j|_{\tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j}$. On peut donc recoller les \tilde{p}_i ensemble pour obtenir $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$. Comme la propriété **(P)** est stable par recollement, comme on l'a supposé, et que les \tilde{p}_i la vérifient : \tilde{p} vérifie **(P)**.

6.4 Vérification que \tilde{X} est un objet universel pour X

C'est dans cette partie où on va utiliser toutes les propriétés de la X -admissibilité.

On part d'un objet \downarrow^q dans \mathcal{C}_X . On va restreindre cette flèche à l'arrivée aux ouverts

$U_i \hookrightarrow X$ dont on sait qu'ils admettent des objets universels. On pourra alors factoriser ces flèches à travers \widetilde{U}_i . On ramène alors par isomorphisme ces factorisations à travers \widetilde{X}_i . Il suffira alors de les recoller entre elles et de procéder identiquement pour l'unicité de la factorisation.

Allons-y : comme U_i est X -admissible (on l'a supposé dans l'hypothèse **(h1)**, qu'on utilise ici à fond), la flèche $\begin{array}{c} q^{-1}(U_i) \\ \downarrow q \\ U_i \end{array}$ est dans \mathfrak{C}_{U_i} . Notons $Y_i = q^{-1}(U_i)$. Comme $\begin{array}{c} \widetilde{U}_i \\ \downarrow p_i \\ U_i \end{array}$ est un objet final de \mathfrak{X}_{U_i} , il existe $f_i : Y_i \rightarrow \widetilde{U}_i$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y_i & \xrightarrow{f_i} & \widetilde{U}_i \\ & \searrow q & \swarrow p_i \\ & & U_i \end{array} .$$

On peut donc définir $\widetilde{f}_i : Y_i \rightarrow \widetilde{X}_i \hookrightarrow \widetilde{X}$ par $Y_i \xrightarrow{f_i} \widetilde{U}_i \xrightarrow{\sim \varphi_i} \widetilde{X}_i \hookrightarrow \widetilde{X}$. \widetilde{f}_i est bien une flèche de \mathfrak{C}_2 en tant que composée de telles flèches. En effet (cf. partie 3.4), l'isomorphisme φ_i et l'inclusion de \widetilde{X}_i dans \widetilde{X} sont par hypothèses sur \mathfrak{C}_2 des flèches de cette catégorie.

Vérifions que les \widetilde{f}_i se recollent bien entre eux. Plaçons-nous sur $Y_i \cap Y_j$. On a que $q(Y_i \cap Y_j) \subset U_i \cap U_j$. Comme $q = p_i \circ f_i$, pour tout $x \in Y_i \cap Y_j$, $f_i(x) \in p_i^{-1}(U_i \cap U_j)$, qu'on a déjà rencontré plus haut dans la démonstration, c'est $\Omega_j(i)$. On peut donc dessiner le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi_{i,j} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \Omega_i(j) & \xleftarrow{f_j} & Y_i \cap Y_j & \xrightarrow{f_i} & \Omega_j(i) \\ & \searrow p_j & \downarrow q & \swarrow p_i & \\ & & U_i \cap U_j & & \end{array} .$$

Si la flèche en pointillé ne commutait pas avec les autres flèches, on aurait deux factorisations possibles de q au-dessus de $U_i \cap U_j$, dont on sait pourtant que $\Omega_i(j)$ est un représentant universel ; ce serait absurde.

Donc, toutes les flèches commutent et le diagramme $\begin{array}{ccccc} & & \Omega_j(i) & & \\ & \nearrow f_i & \downarrow \varphi_{i,j} & \searrow \varphi_i & \\ Y_i \cap Y_j & & & & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j \\ & \searrow f_j & \downarrow \varphi_j & \nearrow \varphi_j & \\ & & \Omega_i(j) & & \end{array}$

nous assure que les f_i se recollent en $f : Y \rightarrow \widetilde{X}$ qui est bien une flèche de \mathfrak{C}_2 (cf. les hypothèses faites dans la partie 3.4). Par ailleurs, $p \circ f$ et q coïncident localement⁴ (les Y_i recouvrent Y) dont coïncident tout court : on est assuré de l'existence d'une factorisation.

Pour l'unicité de la factorisation, supposons qu'on ait $\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \widetilde{X} \\ & \searrow g & \swarrow \\ & & X \end{array}$ avec f et

g distinctes. Comme les Y_i recouvrent Y , il existe nécessairement un i tel que $f|_{Y_i} \neq g|_{Y_i}$. Pour finir la démonstration, énonçons un lemme :

Lemme 5 *Considérant $\begin{array}{c} \widetilde{X} \\ \downarrow \tilde{p} \\ X \end{array}$, on a $\tilde{p}^{-1}(U_i) = \widetilde{X}_i$.*

⁴toujours les mêmes diagrammes...

Démonstration : Soit $x \in \widetilde{X}$ tel que $\tilde{p}(x) \in U_i$. Comme les \widetilde{X}_i recouvrent \widetilde{X} (c'est la conclusion **C1** du théorème de recollement), il existe j tel que $x \in \widetilde{X}_j$. Donc, $\tilde{p}(x) = \tilde{p}_j(x) \in U_j$. Donc, $x \in U_i \cap U_j$. Donc, $y = \varphi_j^{-1}(x) \in \widetilde{U}_j$ vérifie $p_j(x) \in U_i \cap U_j$. Donc $y \in \Omega_i(j)$. Donc, si on pose $z = \varphi_{j,i}(y) \in \Omega_j(i) \subset_{\mathfrak{C}_2} \widetilde{U}_j$, on a $x = \varphi_i(z) \in \widetilde{X}_i$. ■

Revenons à la démonstration : $f|_{Y_i}$ et $g|_{Y_i}$ tombent, d'après le lemme précédent, dans \widetilde{X}_i , qui est un objet universel au-dessus de U_i (sinon, on peut repasser par \widetilde{U}_i). On obtient deux factorisations : c'est absurde.

7 Applications

Pfff! C'était un peu laborieux. Désolé mais je crois que ça va l'être encore...

Passons aux applications, qui sont à l'origine de la généralisation. Tout ce qu'on a devoir faire, c'est vérifier que les objets auxquels on s'intéresse vérifient les hypothèses *ad hoc*.

7.1 Schéma réduit associé à un schéma

Comme on l'a expliqué dans l'introduction, on considère un schéma et on veut tuer les nilpotents de ses anneaux de fonctions régulières. Pour un schéma affine, c'est facile. Dans le cas général, on procède par recollement.

7.1.1 Données et vérifications des hypothèses *ad hoc*

Pour \mathfrak{C}_1 , on prend la catégorie **Sch** tout entière. Il n'y a aucune hypothèses à vérifier.

Pour \mathfrak{C}_2 , on prend la sous-catégorie pleine de **Sch** dont les objets sont les schémas réduits, naturellement! Moralement, cette catégorie est défini localement : pour vérifier que $S \in \mathfrak{C}_2$, il suffit de regarder le germe $\mathcal{O}_{S,x}$ en tout point $x \in S$ et de vérifier que cet anneau est sans nilpotents. Cela nous assure que \mathfrak{C}_2 est stable par recollement quelconque. \mathfrak{C}_2 est évidemment stable par isomorphisme et comme c'est une sous-catégorie *pleine*, les isomorphismes et les inclusions sont bien des flèches de \mathfrak{C}_2 .

Pour la propriété **(P)** on prend juste le fait d'être un morphisme de schémas, ce qui se teste sur les anneaux de germes : la propriété **(P)** est donc stable par recollement. Par ailleurs, les isomorphismes d'espace annelés entre deux schémas sont bien des morphismes de schémas (l'inverse assure que les morphisme entre les anneaux de germes sont bien locaux) et donc, la propriété **(P)** se transporte par isomorphisme.

7.1.2 Tout schéma affine admet un schéma réduit associé

Comme on l'a expliqué, il suffit de faire une construction d'algèbre commutative. La voici :

Proposition 6 Soit $X = \text{Spec } A$ un schéma affine. Alors, $X_{\text{red}} = \text{Spec } A_{\text{red}}$ est un objet universel de \mathfrak{C}_X .

Avant de démontrer cette proposition, rappelons que :

Proposition 7 Soit X un schéma. Alors, X est réduit si, et seulement si, pour tout $U \subset_{\mathfrak{C}_2} X$, $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit.

Démonstration : (de la proposition)

On note $A_{\text{red}} = A/\mathcal{N}$ où \mathcal{N} est l'idéal des nilpotents de A . On la projection canonique $\pi : A \rightarrow A_{\text{red}}$. On en déduit une flèche $p : \text{Spec } A_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec } A$.

Soit Y un schéma réduit muni d'une flèche $f : Y \rightarrow \text{Spec } A$. On a donc une flèche $f^\# : A \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$; comme $\mathcal{O}_Y(Y)$ est réduit, cette flèche se factorise par $A \xrightarrow{\pi} A_{\text{red}}$.

Comme il y a une correspondance entre $\text{Hom}_{\text{Sch}}(Y, \text{Spec } B)$ et $\text{Hom}_{\text{Ann}}(B, \mathcal{O}_Y(Y))$, on en déduit que f se factorise par $p : \text{Spec } A_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec } A$. Si on a deux telles factorisations, on obtient deux factorisations $g, h : A_{\text{red}} \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ de $f^\#$ par $A \xrightarrow{\pi} A_{\text{red}}$ qui sont forcément égales car π est surjective. Il y a donc unicité. ■

7.1.3 Cas général

Évidemment, on utilise le théorème 7.1.3.

Concernant les problèmes d' X -admissibilité, il n'y en a pas. En effet, soit X un schéma. Montrons que tout ouvert (disons non-vide) est X -admissible. Soient Y un schéma réduit, $\downarrow f$ et U un ouvert de X . Alors, $f^{-1}(U)$ est encore un schéma

réduit. Comme la propriété **(P)** est pratiquement vide, les hypothèses **(Adm 1, 2)** sont vérifiées. Pour **(Adm 3)**, on a bien le fait qu'un morphisme de schémas composé à une immersion ouverte en est encore un et qu'un morphisme $g : S \rightarrow S'$ qui tombe dans un ouvert V est un morphisme $g : S \rightarrow V$.

Dans ce cas, le théorème est facilement vérifié puisque tout schéma X est recouvert par des schémas affines, qui admettent des schémas réduits associés. On en déduit :

Théorème 8 (Schéma réduit associé à un schéma) Soit X un schéma.

Alors, il existe un unique X -schéma à unique isomorphisme près, $\downarrow \begin{matrix} X_{\text{red}} \\ X \end{matrix}$, où X_{red} est un schéma réduit, tel que pour tout schéma réduit Y et toute flèche $\downarrow f$, il existe une unique factorisation $f' : Y \rightarrow X_{\text{red}}$.

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ & & X_{\text{red}} \\ & \searrow & \\ Y & & \\ & \searrow f & \\ & & X \end{array}$$

7.2 Normalisation

Dans ce texte, on ne cherche à normaliser que des schémas intègres. En fait, il est possible de normaliser des classes de schémas plus générales.

On dit qu'un schéma intègre X est *normal* si pour tout point $x \in X$, l'anneau des germes de fonctions régulières en x , $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos. Dire qu'un schéma est intègre, moralement, c'est lui imposer une certaine régularité.

7.2.1 Données et vérification des données *ad hoc*

Pour \mathcal{C}_1 , on prend la sous-catégorie de **Sch** dont les objets sont les schémas intègres et les flèches sont les morphismes de schémas dominants.

Pour \mathcal{C}_2 , on prend la sous-catégorie pleine de \mathcal{C}_1 dont les objets sont les schémas normaux (intègres). \mathcal{C}_2 est bien stable par recollement et par isomorphisme (car \mathcal{C}_2 , moralement, est définie localement). Comme c'est une sous-catégorie *pleine*, les isomorphismes et les inclusions sont bien des flèches de \mathcal{C}_2 .

Enfin, pour **(P)**, on prend la propriété d'être un morphisme dominant, c'est-à-dire dont l'image ensembliste est dense dans l'espace d'arrivée. Cette propriété est stable

par recollement : si les $\downarrow p_i$ sont dominants et se recollent, *a fortiori*, le recollement

$\downarrow p$ sera aussi dominant. Enfin, **(P)** est clairement stable par transport par isomor-

phisme.

7.2.2 X-admissibilité

Soit X un objet de \mathfrak{C}_1 , c'est-à-dire un schéma intègre. Soit U un ouvert non-vide de X . Déjà, on sait que U est encore un schéma intègre (cette propriété est en effet locale, elle se vérifie dans les anneaux des germes de fonctions structurales). On sait aussi que U est un ouvert nécessairement dense de X (car X est en particulier un espace topologique irréductible). Vérifions alors que U est un ouvert X -admissible.

Soit donc $\downarrow_p^Y \in \mathfrak{C}_X : Y$ est un schéma normal et p est un morphisme dominant.

Alors, $p^{-1}(U)$ est un schéma normal (pour la structure de schéma induite par Y sur l'ouvert $Y' = p^{-1}(U)$). Par ailleurs, p , restreint à Y' est encore dominant : en effet, soit V un ouvert de X qui rencontre U ; alors, $U \cap V$ est encore un ouvert et rencontre donc $p(Y)$ et donc $p(Y')$. Ainsi, **(Adm 1)** est bien vérifiée pour U .

Pour **(Adm 2)**, il suffit de vérifier que $Y' \xrightarrow{p} U \hookrightarrow X$ est encore dominant : soit V un ouvert de X non-vide ; comme U est dense dans X , $U \cap V$ est non-vide et on est donc ramené au cas précédent.

Enfin, pour **(Adm 3)**, considérons \downarrow_q^Z un autre objet de \mathfrak{C}_X avec une flèche de \mathfrak{C}_X entre Z et Y . Alors, si $f(Z) \subset U$, f est bien un morphisme de Z dans U qui composé avec l'inclusion redonne f ; et si on a un morphisme de Z dans U et qu'on le compose avec l'inclusion, on obtient bien un morphisme de Z dans Y .

7.2.3 Tout schéma affine admet une normalisation

Passons maintenant à la construction du normalisé. Comme on le répète depuis le début, on le construit d'abord pour les schémas affines, grâce à l'algèbre commutative et on recolle ensuite.

On utilisera les lemmes suivants, démontrés dans *Propriétés schématiques locales qu'on peut globaliser* et dans *Propriétés schématiques qui se testent globalement*.

Lemme 9 Soit Z un schéma intègre et normal. Alors, $\mathcal{O}_Z(Z)$ est intégralement clos.

Lemme 10 Soit A un anneau intègre. Alors, A est intégralement clos si, et seulement si, pour tout idéal premier \mathfrak{P} de A , $A_{\mathfrak{P}}$ est intégralement clos.

Proposition 11 Soit $X = \text{Spec } A$ un schéma intègre. Alors, X admet une normalisation.

Démonstration : A est intègre ; on note K sont corps de fractions et $i : A \hookrightarrow K$ l'injection canonique de A dans K .

Soit $\tilde{A} \subset K$ la clôture intégrale de A dans K . Alors, \tilde{A} est intégralement clos (c'est un résultat d'algèbre commutative) et on sait alors que $\text{Spec } \tilde{A}$ est un schéma intègre et normal, d'après le lemme 10.

On note encore $i : A \hookrightarrow \tilde{A}$, qui est encore une injection. On sait alors que le morphisme de schémas associé, $i^* : \tilde{X} = \text{Spec } \tilde{A} \rightarrow \text{Spec } A$ est dominant.

Montrons qu'il vérifie la propriété universelle. Soit Z un schéma intègre et normal muni d'une flèche $f : Z \rightarrow X$, qui est dominante. Comme

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(Z, \text{Spec } A) \simeq \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \mathcal{O}_Z(Z)),$$

on va plutôt regarder ce qui se passe pour les morphismes d'anneaux.

$f^* : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ est-il injectif ? Supposons que non et notons $I = \ker f^* \neq (0)$. Soit $P \in Z$ un point. Alors, l'image de P par f correspond à la préimage de l'idéal $\mathfrak{M}_P \subset \mathcal{O}_{Z,P}$ par $A \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_Z(Z) \rightarrow \mathcal{O}_{Z,P}$. En particulier, pour tout point $P \in Z$,

$I \subset f(P)$, c'est-à-dire que $f(P) \in V(I)$. Donc, $f(Z) \subset V(I)$; cependant, $(0) \in \text{Spec } A$ car A est intègre et $(0) \notin V(I)$. Cela contredit le fait que f est dominant.

Donc $f^* : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ est injectif. Donc, f^* se prolonge aux corps des fractions ($\mathcal{O}_Z(Z)$ est bien intègre).

On cherche une factorisation par une application $Z \rightarrow \text{Spec } \tilde{A} = \text{Spec } \tilde{A}$. C'est équivalent à chercher une application $g : \tilde{A} \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ qui factorise f^* . Cette factorisation est nécessairement déterminée par

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{g(x)}{g(y)} = \frac{f^*(x)}{f^*(y)}$$

, ce qui règle le problème de l'unicité. Il reste à voir qu'elle existe.

Voici un dessin :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}_Z(Z) \\ \downarrow i & \nearrow \exists?g & \downarrow \\ \tilde{A} & & \mathcal{O}_Z(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \text{Frac } \mathcal{O}_Z(Z) \end{array}$$

Soit donc $x \in \tilde{A}$. A-t-on $\tilde{f}^*(x) \in \mathcal{O}_Z(Z)$? Oui! En effet, $\tilde{f}^*(x)$ est entier au-dessus de $\mathcal{O}_Z(Z)$ (il suffit de l'écrire) et $\mathcal{O}_Z(Z)$ est intégralement clos, comme on l'a rappelé avant de commencer la démonstration.

C'est bon! On a l'existence et l'unicité. ■

7.2.4 Cas général

On va utiliser le théorème 7.1.3, sachant qu'il n'y a pas de problème d' X -admissibilité, comme on l'a vu. Tout schéma intègre est recouvert par des ouverts affines, qui admettent une normalisation. On peut donc recoller ces normalisations :

Théorème 12 (Normalisation d'un schéma intègre) Soit X un schéma intègre.

Alors, il existe un unique X -schéma à unique isomorphisme près, $\begin{array}{c} X_{\text{norma}} \\ \downarrow p \\ X \end{array}$, où X_{norma} est un schéma normal et où p est dominant, tel que pour tout schéma normal Y et toute flèche $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow q \\ X \end{array}$ dominante, il existe une unique factorisation $f' : Y \rightarrow X_{\text{norma}}$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f'} & X_{\text{norma}} \\ & \searrow q & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

8 Addendum pour une démonstration plus rapide et moins répétitive

On aurait pu accélérer la preuve du théorème principal en utilisant le théorème suivant (démontré dans *Recollements d'espaces de Cartan relatifs* :

Théorème 13 (Recollements des espaces de Cartan relatifs)

- Soit I un ensemble d'indices et \mathcal{C} une catégorie fixée.
- Soit (S, \mathcal{O}_S) un espace de Cartan à valeurs dans \mathcal{C} qui sera l'espace de base.

– Pour tout $i \in I$, soit $(X_i, \mathcal{O}_i) \xrightarrow{p_i} S$ un S -espace de Cartan.

– Pour tous $i, j \in I$, soit $\Omega_j(i) \subset_{\mathcal{C}} X_i$ un ouvert, qu'on munit du faisceau restreint pour obtenir un S -espace de Cartan $(\Omega_j(i), \mathcal{O}_i|_{\Omega_j(i)}) \xrightarrow{p_i|_{\Omega_j(i)}} S$.

– Enfin, pour tous $i, j \in I$, soit $\varphi_{i,j} : (\Omega_j(i), \mathcal{O}_i|_{\Omega_j(i)}) \longrightarrow (\Omega_i(j), \mathcal{O}_j|_{\Omega_i(j)})$ un morphisme de S -espaces de Cartan qui fait commuter le diagramme.

On suppose que ces données vérifient :

H1 $\Omega_i(i) = X_i$ et $\varphi_{ii} = \text{Id}_{X_i}$

H2 $\varphi_{ij}(\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)) \subset \Omega_i(j) \cap \Omega_k(j)$

H3 (conditions de recollement) Sur $\Omega_j(i) \cap \Omega_k(i)$, on a $\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$

Alors, il existe un S -espace de Cartan $(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{p} S$, recouvert par des ouverts $\widetilde{X}_i \subset_{\mathcal{C}} X$ et des S -isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \psi_i : (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\sim} & (\widetilde{X}_i, \mathcal{O}|_{\widetilde{X}_i}) \subset_{\mathcal{C}} (X, \mathcal{O}) \\ & \searrow p_i & \swarrow p|_{\widetilde{X}_i} \\ & & S \end{array}$$

qui vérifient :

C1 $X = \bigcup_{i \in I} \widetilde{X}_i$

C2 Au-dessus de $\Omega_j(i)$, on a $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$. C'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_i \leftarrow \circlearrowleft \Omega_j(i) & \xrightarrow{\varphi_i} & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j & \xrightarrow{p} & S \\ \downarrow \varphi_{ij} & & \downarrow p & & \\ X_j \leftarrow \circlearrowleft \Omega_i(j) & \xrightarrow{\varphi_j} & \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j & \xrightarrow{p} & S \end{array} \quad \text{commute.}$$

C3 $\begin{cases} x \in X_i \\ y \in X_j \\ \psi(x) = \psi(y) \end{cases} \implies x \in \Omega_j(i) \text{ et } y = \varphi_{ij}(x)$

C3bis $\psi_i(\Omega_j(i)) = \psi_j(\Omega_i(j)) = \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j$

Enfin, il y a unicité à un unique isomorphisme près (compatible avec les données).

Références

[EGA1] Alexandre Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique*, chapitre I, Le langage des schémas

- [EGA2] Alexandre Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique*, chapitre II, Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes
- [Che] Claude Chevalley, *Introduction à la théorie des schémas*