Expression explicitée de la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$

Colas Bardavid
colas.bardavid (a) gmail.com

avril 2007

Pour le traitement explicite d'exemples, on s'intéresse à une représentation particulière de $\mathfrak{S}_4$. En effet, dans certains[1] des calculs que l'on veut mener, et qui ont comme données de base un groupe G et une représentation (fidèle) ρ de G, on a besoin de connaître explicitement toute la représentation, et non (hélàs) comme dans d'autres cas juste sa table de caractères.

---

(1) La représentation standard de $\mathfrak{S}_n$.

Soit k un corps. On commence par donner une définition :

(1.1) Définition. ([FH91, § 2.3]) *Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $V_n = k < x_1, \dots, x_n >$ la représentation par permutation de $\mathfrak{S}_n$. La droite D_n dans V_n de vecteur directeur $x_1 + \cdots + x_n$ est laissée invariante par $\mathfrak{S}_n$. C'est la représentation quotient V_n/D_n qu'on appelle* représentation standard de $\mathfrak{S}_n$. Elle est de dégré $n-1$.

Ceci étant dit, rappelons que le théorème de Maschke (cf. [Lan02, ch. XVIII, th. 1.2]) nous assure que, si G est un groupe fini[2], tout sous-$k[G]$-module admet un supplémentaire. Dans notre cas, cela signifie qu'il existe un supplémentaire W_n de D_n dans V_n, laissé stable par $\mathfrak{S}_n$ et que la représentation standard à laquelle on s'intéresse est justement W_n. La proposition suivante donne une base explicite d'un supplémentaire.

(1.2) Proposition. *Lorsque la caractéristique de k ne divise pas n, l'espace $\bigoplus_{i \leqslant n-1} k(x_i - x_{i+1})$ est un sous-$k[\mathfrak{S}_n]$-module supplémentaire de D_n dans V_n. Lorsqu'au contraire la caractéristique de k divise n, on a $D_n \subset W_n$. Par ailleurs, dans la base $(x_i - x_{i+1})_{i \leqslant n}$, la représentation standard est à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.*

Démonstration : On suppose que $n \neq 0$ dans k. Montrons d'abord que les espaces D_n et W_n sont bien supplémentaires. On montrera ensuite que W_n est $\mathfrak{S}_n$-stable. Montrons que $W_n \cap D_n = \{0\}$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une famille $(\lambda_i)_{i \leqslant n-1}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x_i - x_{i+1}) = x_1 + \cdots + x_n.$$

[1] Typiquement, c'est le cas lorsqu'on s'intéresse au problème inverse en théorie de Galois différentielle.

[2] et si la caractéristique de k ne divise pas $|G|$; dans les exemples particuliers qu'on va traiter ici, on va pouvoir néanmoins se libérer en partie de cette contrainte.

On voit sur cette expression que nécessairement $\lambda_{n-1} = -1$ puis on prouve de proche en proche que $\lambda_{n-i} = -i$. Mais on voit aussi directement sur l'expression que $\lambda_1 = 1$ et donc que $-(n-1) = 1$, ce qui implique que $n = 0$ dans k et est absurde.

Pour la stabilité, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\sigma \cdot (x_i - x_{i+1}) = x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)}$. Notons $m = \sigma(i)$ et $p = \sigma(i+1)$. Il y a deux cas possibles : soit $m < p$ et alors les coefficients sont soit 0 soit 1 ; soit $m > p$ et alors les coefficients sont soit 0 soit -1. Traitons le cas $m < p$: on peut alors décomposer dans la base

$$\sigma \cdot (x_i - x_{i+1}) = x_m - x_p = (x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_{m+2}) + \cdots + (x_{p-1} + x_p) .$$

■

Notons par ailleurs :

(1.3) Fait. *La représentation standard est fidèle. Si la caractéristique de k ne divise pas n, elle est irréductible. Si la caractéristique de k divise n, elle n'est pas irréductible.*

Démonstration : On note $W_n = V_n / D_n$ la représentation standard et $V_n \xrightarrow{\pi} W_n$ la projection canonique. Pour la fidélité, voici comment on procède. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que pour tout $y \in W_n$, $\sigma \cdot y = y$. En particulier, si on prend $y = \pi(x_i)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sigma \cdot y &= \sigma \cdot \pi(x_i) \\ &= \pi(\sigma \cdot x_i) \\ &= \pi\left(x_{\sigma(i)}\right) \\ &= \pi(x_i) . \end{aligned}$$

Par conséquent, $\left(x_{\sigma(i)} - x_i\right) \in D_n$, ce qui n'est possible que si $\sigma(i) = i$. Ainsi, nécessairement, $\sigma = \mathrm{Id}$ et la représentation standard est donc fidèle.

Pour l'irréductibilité : soit E une sous-représentation non-nulle de W_n. On sait donc qu'il existe des $x = \pi\left(\sum \lambda_i x_i\right)$ dans E avec les λ_i non tous égaux. Soit $(\lambda_i)_i \in k^n$ une famille telle que $x = \pi\left(\sum \lambda_i x_i\right)$ soit dans E, non-nul, et telle que le nombre N de $x_i \neq 0$ soit minimal. Comme les λ_i sont non tous égaux, quitte à ajouter $-\lambda_1 (x_1 + \cdots + x_n)$ à x, on sait que $N \leqslant n - 1$.

– Si $N = 1$, quitte à renormaliser x, on a donc que $x_{i_0} \in E$ pour un certain i_0 ; en faisant agir $\mathfrak{S}_n$, on en déduit que tous les x_i sont dans E et donc que $E = W_n$.
– Si $N > 1$, quitte à faire agir $\mathfrak{S}_n$ sur notre élément, on peut supposer que

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i .$$

  ⋆ Si $N = 2$ et que $\lambda_1 = -\lambda_2$, quitte à renormaliser, on peut supposer que $x = x_1 - x_2$. En faisant agir $\mathfrak{S}_n$, on a donc que les $(x_i - x_{i+1}) \in E$. Si $\mathrm{car}(k) \nmid n$, comme on l'a vu dans la proposition 1.1, on a donc une famille libre de taille $n-1$ dans E et donc $\dim_k E \geqslant (n-1)$. Comme $\dim_k W_n = n - 1$, on a $E = W_{n-1}$.

  Au contraire, si $\mathrm{car}(k) \mid n$, la famille des $(x_i - x_{i+1})$ n'est plus libre dans W_n ; comme par ailleurs elle engendre un sous-espace $\mathfrak{S}_n$-stable, on obtient ainsi une sous-représentation non-nulle de W_n de dimension $\leqslant n - 2$.

  ⋆ Si $N = 2$ et que $\lambda_1 = \lambda_2$, on peut supposer que $x = x_1 + x_2$. On calcule alors

$$x - (13) \cdot x = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_2) = x_1 - x_3$$

  et on est ramené au cas précédent.

* ⋆ Si $N = 2$ et que ${\lambda_1}^2 \neq {\lambda_2}^2$, on calcule

$$\begin{aligned} \lambda_2 x - \lambda_1 (12)\cdot x &= \left(\lambda_1\lambda_2 x_1 + {\lambda_2}^2 x_2\right) - \left({\lambda_1}^2 x_2 + \lambda_1\lambda_2 x_1\right) \\ &= \left({\lambda_2}^2 - {\lambda_1}^2\right) x_2 \end{aligned}$$

  et on est ramené au cas $N = 1$.
* ⋆ Si $N \geqslant 3$ et que parmi les λ_i on en peut trouver deux, λ_{i_1} et λ_{i_2}, dont les carrés ne sont pas égaux, alors la procédure du cas précédent permet de diminuer N de 1, ce qui est absurde car N est minimal.
* ⋆ Dans le cas contraire, on peut supposer, quitte à renormaliser, que tous les λ_i valent soit 1 soit -1. Si tous les λ_i sont égaux, par exemple à 1, on fait le calcul suivant

$$\begin{aligned} x - \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ 2 & 3 & \cdots & N+1 \end{pmatrix} x &= \sum_{i \leqslant N} \lambda_i x_i - \sum_{i \leqslant N} \lambda_i x_{i+1} \\ &= x_1 - x_{N+1}, \end{aligned}$$

  ce qui fait diminuer N et est donc absurde. Si, au contraire, les 1 et les -1 sont mélangés, on peut par exemple supposer (quitte à faire agir $\mathfrak{S}_n$) que x s'écrit

$$x = x_1 - x_2 - x_3 + \sum_{i=4}^{N} \lambda_i x_i.$$

  On calcule alors :

$$\begin{aligned} x - (123)\cdot x &= \left(x_1 - x_2 - x_3 + \sum_{i=4}^{N} \lambda_i x_i\right) + \left(x_2 - x_3 - x_1 + \sum_{i=4}^{N} \lambda_i x_i\right) \\ &= -2x_3 + \sum_{i=4}^{N} \lambda_i x_i, \end{aligned}$$

  ce qui fait diminuer N et est donc absurde.

■

(1.4) Remarque. Lorsqu'on connaît la classification des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$, par exemple telle qu'elle est expliquée dans [FH91, Lecture 4], une question qu'on se pose naturellement est : à quelle partition de n correspond la représentation standard ? Réponse : comme indiqué dans [FH91, exercise 4.6], dans le cas où $k = \mathbf{C}$, la représentation standard correspond à la la partition $n = (n-1) + 1$.

(2) Expression explicitée de la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$.

On fait les calculs explicites pour $n = 4$ et dans la base donnée par la proposition 1.1. On note ρ la représentation obtenue. On peut vérifier les résultats généraux obtenus sur ce cas particulier. Voici les matrices que l'on trouve.

(2.1) Identité.

σ	Id
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(2.2) Transpositions.

σ	(12)	(13)	(14)
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 & 1 \\ -1 & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & & \end{pmatrix}$

σ	(23)	(24)	(34)
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & -1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & & -1 \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(2.3) Double-transpositions.

σ	$(12)(34)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & 1 & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 & 1 \\ & -1 & \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$

(2.4) 3-cycles.

σ	(123)	(132)	(134)	(143)
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 & 1 \\ -1 & & 1 \\ -1 & & \end{pmatrix}$

σ	(124)	(142)	(234)	(243)
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} & & -1 \\ 1 & & -1 \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & & -1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$

(2.5) 4-cycles.

σ	(1234)	(1243)	(1324)
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} & & -1 \\ 1 & & -1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$

σ	(1342)	(1423)	(1432)
$\rho(\sigma)$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 & 1 \\ & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \\ -1 & & \end{pmatrix}$

(2.6) Remarque. En tenant compte de la remarque 1.4, la commande `SymmetricRepresentation` du logiciel de calcul formel Magma permet de calculer automatiquement les coefficients matriciels de « la » représentation standard. Notons qu'il n'y a pas de choix naturel d'une base de V_n/D_n et donc qu'il n'y a pas de « représentation matricielle standard » naturelle. En particulier, si on veut comparer les calculs faits ici avec les résultats de Magma, tout ce que l'on sait, c'est que les matrices obtenues sont conjuguées entre elles.

Références

[FH91] William FULTON et Joe HARRIS : *Representation theory*, volume 129 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[Lan02] Serge LANG : *Algebra*, volume 211 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third édition, 2002.