Représentations de $\mathfrak{S}_d$

30 novembre 2001

Rappels

Dans toute la suite, K est un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos, et G un groupe.

On note Conj(G) l'ensemble des classes de conjugaison de G.

On utilisera librement le théorème de Maschke, et on écrira toujours :

$$K[G] = \prod_{i=1}^{s} R_i,$$

où $(L_i)_i$ est une famille de représentants des idéaux à gauche simples, modulo isomorphisme, et où les $R_i = \sum_{L \simeq L_i} L$ sont des anneaux simples, tels que si $i \neq j$, $R_i R_j = 0$ et où l'unité de $K[G]$ est la somme des unités de R_i.

On aura en fait plus intérêt à écrire : en tant que module sur lui-même,

$$K[G] \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathcal{M}_{n_i}(K)$$

1 Compléments théoriques sur les représentations

Définition 1. *Une représentation de G est un morphisme de G dans un certain $GL(V)$ (où V est un K-ev). Par abus de langage, on appelle V représentation de G.*

Elle est dite irréductible si le seul sous-espace de V stable par G et non nul est V, i.e. *si le $K[G]$-module V est simple.*

Une représentation de G, au-dessus de K, c'est un $K[G]$-module, où l'on note $g \cdot x = \varphi(g)(x)$. Et réciproquement.

Dans toute la suite, on supposera G fini.

On rappelle le lemme suivant :

Lemme 1. *Si V est une représentation de G et que W est une sous-représentation de V, c'est-à-dire un sous-espace stable par G alors, il existe W', sous-représentation de V telle que $V = W \oplus W'$.*

En conséquence directe, les représentations de G sont des sommes directes de représentations irréductibles de G.

Lemme 2. *Soit G un groupe et K un corps. Soit E un module simple sur A. Alors, E est isomorphe à un des L_i.*

Démonstration. $AE \neq 0$ donc il existe i tel que $R_iE \neq 0$ et donc il existe un $L \simeq L_i$ tel que $LE \neq 0$. Plus précisément, il existe $y \in E$ tel que $L \cdot y \neq 0$. Comme E est simple et que $L \cdot y$ est un sous A-module de E, c'est E tout entier. Finalement, $\varphi : \begin{array}{ccc} L & \to & E \\ r & \longmapsto & r \cdot y \end{array}$ est ainsi surjective et injective car L est simple, en tant que module. ■

En particulier, une représentation irréductible de G est isomorphe à l'un des L_i. Réciproquement, les L_i (qui sont non-isomorphes en tant que $K[G]$-modules) consituent des représentations irréductibles :

$$\varphi_i \; : \; \begin{array}{ccc} G & \to & GL(L_i) \\ g & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} L_i & \to & L_i \\ x & \longmapsto & gx \end{array} \right) \end{array}.$$

Proposition 1. *Le nombre de représentations irréductibles de G (prises à isomorphisme près, comme toujours) est égal aux nombres de classes de conjugaison de G.*

Démonstration. D'après ce qui précède, il nous suffit de décompter les L_i, ou, ce qui revient au même, les R_i.

À chaque $\mathcal{G} \in \mathrm{Conj}(G)$, on associe l'élément de $K[G]$:

$$a_{\mathcal{G}} = \sum_{g \in \mathcal{G}} e_g.$$

Lemme 3. *Les $(a_{\mathcal{G}})_{\mathcal{G} \in Conj(G)}$ forment une base du centre de $K[G]$.*

Démonstration. D'abord, facilement, les $(a_{\mathcal{G}})$ sont libres. Par ailleurs, si $x = \sum_{g \in G} k_g \cdot e_g$ commute avec tous les éléments de $K[G]$, alors si $h \in H$, on a :

$$\sum_{g \in G} k_g \cdot e_h e_g e_{h^{-1}} = \sum_{g \in G} k_{h^{-1}gh} \cdot e_g = \sum_{g \in G} k_g \cdot e_g$$

et donc x est combinaison linéaire de $(a_{\mathcal{G}})$. ■

Or, on sait que les R_i sont des $\mathcal{M}_{n_i}(K)$ et que leur centre est Ke_i. Le centre de $K[G]$ est alors de dimension s au-dessus de K (puisque valant $\prod_i Ke_i$).

En comparant les dimensions, on a l'égalité. ■

2 Représentations de $\mathfrak{S}_d$

Dans cette partie, on explicite un lien entre les classes de conjugaison et les représentations irréductibles.

Définition 2. *À toute partition de $[|1, d|]$ on associe le diagramme d'Young $(\lambda_i)_i$ où $\lambda_{i+1} \geq \lambda_i$ et où l'entier k apparaît l fois ssi il y a l parties de cardinal k dans la partition.*

On a $\sum \lambda_i = d$.

Graphiquement, on représente un diagramme d'Young ainsi :

λ1					
λ2					
λ3					
λ4					

On ordonne les diagrammes d'Young lexicographiquement.

Définition 3. *Un tableau T est un couple dont le premier élément est un diagramme d'Young et dont le second est un d-uplet $(i_1, \ldots, i_d)$ d'entiers distincts appartenant à* $[|1, d|]$.

Concrètement, on a numéroté un diagramme d'Young.

$\mathfrak{S}_d$ agit naturellement sur les tableaux.

Visuellement, cela donne :

λ1	i1	i2	i3	i4	i5
λ2	i6	i7	i8	i9	
λ3	i10	i11	i12	i13	
λ4	i14	i15	i16		

Le cas intéressant est le cas où $i_j = j$, c'est-à-dire :

λ1	1	2	3	4	5
λ2	6	7	8	9	
λ3	10	11	12	13	
λ4	14	15	16		

Cependant, on sait que des permutations conjuguées ont leur décomposition en cycle disjoints similaires, dans le sens où chacune contient autant que l'autre de cycles de longueur $k \in [|1, d|]$. On sait même que ce dénombrement des k-cycles est caractéristique des classes de conjugaison.

On peut donc associer biunivoquement à chaque $\mathcal{G} \in \mathrm{Conj}(\mathfrak{S}_d)$ un diagramme d'Young, qu'on notera $\lambda_{\mathcal{G}}$: c'est le diagramme d'Young d'une quelconque des partitions de $[|1, d|]$, formée par les supports des cycles de la décomposition en cycles disjoints d'un élément quelconque de $\mathcal{G}$.

Définition 4. *Si T est un tableau, on peut alors construire les groupes :*

$$P_T = \{\sigma \in \mathfrak{S}_d \ / \ \sigma \textit{ laisse les lignes invariantes}\} \textit{ et}$$

$$Q_T = \{\sigma \in \mathfrak{S}_d \ / \ \sigma \textit{ laisse les colonnes invariantes}\}$$

Définition 5. *Enfin, on associe à un tableau T :*

$$a_T = \sum_{g \in P_T} e_g \qquad b_T = \sum_{g \in Q_T} \varepsilon(g) e_g \qquad c_T = a_T \cdot b_T \qquad \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d].$$

C'est à partir de c_T que l'on va construire les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_d$.

Désormais, comme on l'a dit précédemment, on ne s'intéressera qu'aux tableaux de la forme $(\lambda, (1, 2, \ldots, n))$. Dans ce cas, en ce qui concerne les notations, on remplacera les indices T par des indices λ.

Définition 6. *On pose $A = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ et $V_\lambda = A \cdot c_\lambda$; cet espace constitue naturellement (comme tout idéal à gauche) une représentation de $\mathfrak{S}_d$, si l'on pose*

$$\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_d & \to & GL(V_\lambda) \\ \sigma & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} V_\lambda & \to & V_\lambda \\ x & \longmapsto & e_\sigma \cdot x \end{array} \right) \end{array}.$$

2.1 Structure des représentations de $\mathfrak{S}_d$

Pour établir le théorème, on a besoin de deux lemmes :

Lemme 4. *c_λ est le seul élément (à un scalaire près) tel que $\forall p \in P_\lambda$, $\forall q \in Q_\lambda$, $p \cdot c_\lambda \cdot \varepsilon(q) q$.*

Lemme 5. (1) *Si l'on suppose $\lambda > \mu$, alors pour tout $a \in A$, $a_\lambda \cdot a \cdot b_\mu = 0$, et en particulier, $c_\lambda \cdot c_\mu = 0$.*

(2) *On a $c_\lambda \cdot A \cdot c_\lambda \subset \mathbb{C} c_\lambda$. En particulier, $\exists n_\lambda \ / \ c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$.*

On admet les démonstrations (élémentaires) qu'on peut trouver dans [1].

Théorème 1. *Les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_d$ sont les V_λ, à isomorphisme près.*

Démonstration. D'abord, montrons que les V_λ sont bien irréductibles. Soit $W \subset V_\lambda$ stables par $K[G]$. Comme $c_\lambda W \subset c_\lambda V_\lambda \subset \mathbb{C} c_\lambda$.

Supposons, dans un premier temps, $c_\lambda W = \mathbb{C} c_\lambda$; alors $A c_\lambda W = V_\lambda \subset W$.

L'autre possibilité est $c_\lambda W = 0$; alors $W \cdot W \subset A c_\lambda W = 0$: on raisonne par l'absurde ne supposant $W \neq 0$; soit donc $w \in W$ non nul. Il existe forcément un i tel que $R_i w \neq 0$, donc un $L \simeq L_i$ tel que $Lw \neq 0$ et $\begin{array}{ccc} L & \to & W \\ x & \longmapsto & x \cdot w \end{array}$ est un $K[G]$ morphisme, injectif car L est simple, en tant que module. Donc L s'injecte dans W. Donc on devrait avoir : $L \cdot L = 0$, et en fait, pour tout $L' \simeq L$, $L \cdot L' = 0$. Donc $R_i \cdot R_i = 0$; mais ceci est faux, vu que R_i est une algèbre matricielle, possédant une unité. Par conséquent, $W = 0$ et $c_\lambda V_\lambda = V_\lambda$.

Par ailleurs, elles sont bien distinctes (non isomorphes). Cela vient du fait que $c_\lambda V_\lambda = V_\lambda$ et que si $\lambda > \mu$, $c_\lambda V_\mu = 0$. ∎

3 Représentations induites

Voici le problème : on dispose d'une représentation de $H \subset G$, et on veut en faire une représentation de G.

3.1 Représentation induite

Définition 7 (produit tensoriel au dessus de B). *Soient E un A-module-B et F un B-module-C, c'est-à-dire que E est un A-module à gauche et un B-module à droite.*

Alors, $E \underset{B}{\otimes} F$ est le A-module engendré par les $E \times F$ et quotienté par le module engendré par

$$\{(e, f_1) + (e, f_1) - (e, f_1 + f_2),$$

$$(e_1, f) + (e_1, f) - (e_1 + e_2, f),$$

$$\lambda(e, f) - (\lambda e, f),$$

$$(e\mu, f) - (e, \mu f)$$

$$/ \; e_i,\ e \in E,\ f_i,\ f \in F,\ \lambda \in A,\ \mu \in B\}\,.$$

On note alors la classe d'un élément $(e,\ f)$: $e \otimes f$.

Définition 8. *Soit W une représentation de H, sous-groupe de G. On définit la représentation de G induite par W, notée $Ind_H^G(W)$ par*

$$Ind_H^G(W) = K[G] \underset{K[H]}{\otimes} W.$$

Pour pouvoir travailler un tant soit peu avec ces objets, il faut se les représenter différemment.

Considérons une classe $(g_i H)_{i \leq k}$ de représentants des classes à gauche de G modulo H. On se servira plus loin de cette classe ; on note que $(Hg_i^{-1})_i$ est une classe de représentants des (Hg).

Soit x un élément quelconque de $Ind_H^G(W)$. Il peut s'écrire ainsi :

$$x = \sum_{g \in G} e_g \otimes v_g.$$

Cependant, chaque $g \in G$ est dans une classe $g_i H$, et donc il existe h_g tel que $g = g_i h_g$. x s'écrit alors

$$x = \sum_{g \in G} e_{g_i} e_{h_g} \otimes v_g = \sum_{g \in G} e_{g_i} \otimes h_g v_g = \sum_{i=1}^{k} e_{g_i} \otimes \left(\sum_{g \in g_i H} h_g v_g \right).$$

Cette écriture est unique.

3.2 Produit scalaire entre représentations

On a déjà vu que toute représentation de G se décomposait en représentations irréductibles. En fait, cette décomposition est unique.

Démonstration. Remarquons d'abord que deux représentations G-isomorphes ont même caractère.

Ensuite, si l'on écrit $W \simeq \bigoplus V_i^{\oplus n_i}$, on a $\frac{\chi_W(e_i)}{\chi_i(e_i)} = n_i$. ■

On peut alors définir :

Définition 9. *Soient* $V \simeq \bigoplus V_i^{\oplus n_i}$ *et* $W \simeq \bigoplus V_i^{\oplus m_i}$ *deux représentations de* G*. On pose :*

$$< V, W >= \sum m_i n_i.$$

En particulier, le produit scalaire d'un représentation W avec une irréductible V_i est le nombre de fois que V_i apparaît dans la décomposition de W.

3.3 Théorème de Frobenius

Si $\pi : G \to GL(V)$ est une représentation et si H est un sous-groupe de G, on note $\pi_{|H}$ la trace de la représentation sur H.

Lemme 6. *Soit* V *un* $K[G]$*-module simple. Alors,* $Mor_{K[G]}(V, V)$ *est l'ensemble des homothéties.*

Démonstration. En effet, si $\varphi \in Mor_{K[G]}(V, V)$ est non-nul, on sait que c'est un isomorphisme. Soit k une valeur propre de φ : $\varphi - k \cdot Id$ est non injectif, donc, ici, nul. ■

Théorème 2 (Frobenius). *Soit* G *un groupe et* H *un sous-groupe ; soient* W *une représentation de* H *et* π *une représentation (vue comme morphisme cette fois-ci) ; alors*

$$< \pi, Ind_H^G(W) >=< \pi_{|H}, W > .$$

Démonstration. On procède en deux étapes.

D'abord, on note que $dim_K(Mor_{K[G]}(\bigoplus V_i^{\oplus n_i}, \bigoplus V_i^{\oplus m_i})) =< \bigoplus V_i^{\oplus n_i}, \bigoplus V_i^{\oplus m_i} >$.

$$dim_K(Mor_{K[G]}(\bigoplus V_i^{\oplus n_i}, \bigoplus V_i^{\oplus n_i})) = \sum n_j dim_K(Mor_{K[G]}(V_j, \bigoplus V_i^{\oplus m_i})).$$

Soit $\varphi \in Mor_{K[G]}(V_j, \bigoplus V_i^{\oplus m_i})$. On décompose φ à l'arrivée. On obtient m_i $K[G]$-morphismes de V_j dans V_i. Si $i \neq j$, ces morphismes sont tous nuls ; si $i = j$, ces sont tous des homothéties, caractérisée par m_i nombres complexes. Donc : $dim_K(Mor_{K[G]}(V_j, \bigoplus V_i^{\oplus m_i}) = m_j$, et finalement,

$$dim_K(Mor_{K[G]}(\bigoplus V_i^{\oplus n_i}, \bigoplus V_i^{\oplus n_i})) = \sum m_j n_j.$$

Par conséquent, $dim_K\,(Mor\,(W, V)) =< V, W >$.

Enfin, on montre que, en tant qu'espace vectoriel :

$$Mor_{K[H]}\left(\pi_{|H}, W\right) \simeq Mor_{K[G]}\left(\pi, Ind_H^G(W)\right).$$

Pour ce faire, on construit deux morphismes réciproques l'un de l'autre, en reprenant les notations précédentes. Les vérifications faciles sont laissées au lecteur.

$$T_1 \ : \ \begin{array}{ccc} Mor_{K[H]}\left(\pi_{|H}, W\right) & \to & Mor_{K[G]}\left(\pi, Ind_H^G(W)\right) \\ \varphi & \longmapsto & x \mapsto \sum_{i=1}^{k} e_{g_i} \otimes \varphi(g_i^{-1}x) \end{array}.$$

Vérifions que T est bien défini, *i.e.* que $\psi = T_1(\varphi)$ est bien un $K[G]$-morphisme. Soient $g \in G$ et $x \in \pi$. Il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ telle que pour tout i, $g_i^{-1}g$ est dans une classe à droite $Hg_{\sigma(i)}^{-1}$:

$$g_i^{-1}g = h_g g_{\sigma(i)}^{-1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\psi(g\cdot x) &= \sum_{i=1}^{k} e_{g_i}\otimes\varphi(g_i^{-1}gx) = \sum_{i=1}^{k} e_{g_i h_g}\otimes\varphi(g_{\sigma(i)}^{-1}x) \\
&= \sum_{i=1}^{k} e_{g_{\sigma^{-1}(i)} h_g}\otimes\varphi(g_i^{-1}x) = \sum_{i=1}^{k} e_{gg_i}\otimes\varphi(g_i^{-1}x) = g\psi(x)
\end{aligned}$$

L'application réciproque est celle-ci, en notant $g_1 = e$:

$$T_2 \ : \ \begin{array}{ccc} Mor_{K[G]}\left(\pi,\, Ind_H^G(W)\right) & \to & Mor_{K[H]}\left(\pi_{|H},\, W\right) \\ \varphi \ : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{k} e_{g_i}\otimes\varphi_i(g_i^{-1}x) & \longmapsto & \varphi_1 \end{array}.$$

Cette application est bien définie : on vérifie facilement qu'elle est $G[H]$-linéaire.

On a clairement $T_2 \circ T_1 = Id$ Vérifions que $T_1 \circ T_2 = Id$. Soit

$$\varphi \ : x \mapsto \sum_{i=1}^{k} e_{g_i}\otimes\varphi_i(g_i^{-1}x) \in Mor_{K[G]}\left(\pi,\, Ind_H^G(W)\right).$$

On aimerait que les φ_i soient égaux. Soit $g \in G$. Alors, $\varphi(gx) = x\varphi(x)$, ce qu'on réécrit, en notant $g_i^{-1}g = h_i g_{\sigma(i)}^{-1}$ (ce qui implique $g_i h_i = g g_{\sigma(i)}$),

$$\begin{aligned}
\varphi(gx) &= \sum_{i=1}^{k} e_{g_i}\otimes\varphi_i(g_i^{-1}gx) = \sum_{i=1}^{k} e_{g_i h_i}\otimes\varphi_i(g_{\sigma(i)}^{-1}x) = g\sum_{i=1}^{k} e_{g_{\sigma(i)}}\otimes\varphi_i(g_{\sigma(i)}^{-1}x) \\
&= g\varphi(x) = g\sum_{i=1}^{k} e_{g_i}\otimes\varphi_i(g_i^{-1}x) = g\sum_{i=1}^{k} e_{g_{\sigma(i)}}\otimes\varphi_{\sigma(i)}(g_{\sigma(i)}^{-1}x).
\end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture, on en déduit que pour tout i, $\varphi_{\sigma(i)}(g_{\sigma(i)}^{-1}x) = \varphi_i(g_{\sigma(i)}^{-1}x)$, donc $\varphi_{\sigma(i)}(x) = \varphi_i(x)$. Maintenant, il suffit de bien choisir g : si l'on fixe i et que l'on prend $g = g_i^{-1}$, on a $\sigma(i) = 1$, ce qu'on voulait. ■

4 Induite et représentation de $\mathfrak{S}_d$

Définition 10. *Soit λ et μ des diagrammes de Young repectivment d'une partition de $[|1,\, d|]$ et de $[|1,\, d+1|]$. On dit que $\mu = \lambda + 1$ si on a obtenu μ en ajoutant une case à λ.*

On cite ce théoèrme, qui a lui seul motive tout l'exposé :

Théorème 3. *Soit λ un diagramme de Young d'une partition de $[|1,\, d|]$. Alors*

$$Ind_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+1}}(V_\lambda) = \bigoplus_{\mu\ /\ \mu=\lambda+1} V_\mu.$$

D'après le théorème de Frobenius, il est équivalent à

Théorème 4. *Soit λ un diagramme de Young d'une partition de* $[|1,\ d+1|]$. *Alors*

$$(V_\lambda)_{|\mathfrak{S}_d} = \bigoplus_{\mu\ /\ \mu=\lambda-1} V_\mu.$$

Références

[1] W. Fulton, J. Harris *Representation theory*, chapitre 4 ; Springer, GTM 129, 1991

[2] S. Lang, *Algebra*, chapitres XVII et XVIII, Addison-Wesley, 1965