Schémas presque affines, schémas qausi-affines et schémas quasi-compacts

Colas Bardavid

jeudi 5 mai 2005

C'est en étudiant les schémas affines dont l'anneau des fonctions est intègre que j'ai dégagé les notions de schéma *presque affine* et de schéma *quasi-affine*. Il s'avère que ces notions sont inutiles. C'est l'objet de ce texte.

Table des matières

Résulats

Théorème 0.1 *Un schémas S est quasi-compact si, et seulement si, il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines.*

Lemme 0.2 *Soit S un schéma et f une fonction globale. Alors,*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ D(f^n) = D(f) \text{ et } V(f^n) = V(f).$$

Proposition 0.3 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma affine et U un ouvert défini par un nombre fini d'équations : c'est-à-dire, $X \setminus U = V(K)$ avec K un idéal de type fini. Alors, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est un schéma quasi-compact.*

Questions en suspens et travail à faire

Travail à faire 0.4 *Peut-on caractériser les ouverts d'un schéma affine qui sont quasi-compacts ?*

1 Schémas presque affines

Définition 1.1 *On dit qu'un schéma S est* presque affine *s'il est peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines.*

Fait 1.2 *Un schéma affine est évidemment presque affine.*

Remarque : Cette notion permet d'exprimer certains résultats élégamment. Par exemple, si S est un schéma presque affine et que f, une fonction globale, est telle que $V(f) = S$, alors f est nilpotente.

2 Schémas quasi-affines

Cette nouvelle notion me donne envie d'en poser une autre, plus intrinsèque. En effet, la notion de presque affinité ne se voit pas sur le schéma mais se vérifie dans un atlas. Si au moins elle pouvait se vérifier dans *tous* les atlas.

Définition 2.1 *On dit qu'un schéma est* quasi-affine *si de tout recouvrement par des ouverts affines on peut extraire un recouvrement fini.*

3 Schémas quasi-compacts

On rappelle la définition d'un espace topologique quasi-compact.

Définition 3.1 *On dit qu'un espace topologique X est* quasi-compact *si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement ouvert.*

Proposition 3.2 *Soit X un espace topologique et $(X_i)_{i\leq N}$ une famille finie de sous-espaces de X tels que $\bigcup_{i\leq N} X_i = X$. Si tous les X_i sont quasi-compacts, alors X est quasi-compact.*

4 Lien entre presque affinité, quasi-affinité et quasi-compacité

C'est un exercice d'algèbre commutative classique que de dire :

Proposition 4.1 *Un schéma affine est quasi-compact.*

C'est évident de dire :

Proposition 4.2 *Un schéma quasi-affine est presque affine.*

ainsi que

Proposition 4.3 *Un schéma quasi-compact est quasi-affine.*

Ce qu'on synthètise en disant que

Proposition 4.4 *affine ⇒ quasi-compact ⇒ quasi-affine ⇒ presque affine.*

Évidemment, on ne peut pas boucler la boucle (*cf.* les espaces projectifs). Cependant, on a :

Proposition 4.5 *Un schéma presque affine est quasi-compact.*

Conclusion :

Proposition 4.6 *Les notions de quasi-compacité, de quasi-affinité et de presque affinité sont confondues.*

Dit autrement :

Théorème 4.7 *Un schémas S est quasi-compact si, et seulement si, il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines.*

5 Ouverts d'un schéma affine qui sont quasi-compacts

Proposition 5.1 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma affine et U un ouvert défini par un nombre fini d'équations : c'est-à-dire, $X \setminus U = V(K)$ avec K un idéal de type fini. Alors, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est un schéma quasi-compact.*

5.1 Démonstration algébrique

Pour montrer la proposition, on utilise le lemme suivant qui est évident.

Lemme 5.2 *Soit S un schéma et f une fonction globale. Alors,*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ D(f^n) = D(f) \text{ et } V(f^n) = V(f).$$

Démonstration : (de la proposition 5.1)

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de U. On sait que les ouverts distingués $D(f)$ forment une base de la topologie de X. On peut donc écrire que $U_i = \bigcup_{j \in J_i} D(f_{i,j})$. Par conséquent, $U = \bigcup_{i \in I, j \in J_i} D(f_{i,j})$.

Cependant, on sait que $U = X \setminus V(K)$ où K est un idéal de fonctions globales. Donc :

$$\begin{aligned} U = X \setminus V(K) &= \bigcup D(f_{i,j}) \\ &= \bigcup (X \setminus V(f_{i,j})) \\ &= X \setminus \bigcap V(f_{i,j}). \end{aligned}$$

Donc $V(K) = \bigcap V(f_{i,j}) = V(\sum (f_{i,j}))$.

À ce stade, tout ce que l'on peut dire, c'est que

$$\sqrt{K} = \sqrt{\sum (f_{i,j})}.$$

Or, on sait que K est de type fini : on écrit $K = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$.

Attention aux yeux, nous rentrons dans une partie de la démonstration où il y a beaucoup d'indices...

Pour $1 \leq k \leq N$, on a que $\varphi_k \in \sqrt{\sum (f_{i,j})}$; soit donc $N_k \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$(\varphi_k)^{N_k} = g_1(k) f_{\mathbf{i}_1(k)} + \cdots + g_{n_k}(k) f_{\mathbf{i}_{n_k}(k)}, \tag{1}$$

où les $\mathbf{i}_j(k)$ avec $j \leq n_k$ sont des indices bien choisis du type (i,j) et où les $g_j(k)$ sont des fonctions.

De même, pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq j \leq n_k$, on a $f_{\mathbf{i}_j(k)} \in \sqrt{(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)}$ et on peut donc poser $M(j,k) \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$(f_{\mathbf{i}_j(k)})^{M(j,k)} = \sum_{i=1}^{N} h_i(j,k) \varphi_i,$$

où les $h_i(j,k)$ sont des fonctions bien choisies. Donc :

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_k} \left(f_{\mathbf{j}(k)}^{M(j,k)} \right) \subset (\varphi_1, \ldots, \varphi_N). \tag{2}$$

Pour k compris entre 1 et N, en élevant la formule (1) à la puissance $\sum_{1 \leq j \leq n_k} M(j,k)$, on obtient :

$$(\varphi_k)^{N_k \sum_{1 \leq j \leq n_k} M(j,k)} = \sum_{\substack{(u_1, \ldots, u_{n_k}) \in \mathbf{N}^{n_k} \mid \\ \sum_{1 \leq j \leq n_k} u_j = \sum_{1 \leq j \leq n_k} M(j,k)}} g_1^{u_1} {f_{\mathbf{i}_1(k)}}^{u_1} \cdots g_{n_k}^{u_{n_k}} {f_{\mathbf{i}_{n_k}(k)}}^{u_{n_k}}.$$

Mais forcément l'un des u_j est tel que $u_j \geq M(j,k)$ (sinon...).

En posant $N'_k = N_k \sum_{1 \leq j \leq n_k} M(j,k)$, on a donc que

$$(\varphi_k)^{N'_k} \in \sum_{j=1}^{n_k} \left(f_{\mathbf{i}_j(k)}^{M(j,k)} \right).$$

Et, en particulier,

$$\left((\varphi_1)^{N'_1}, \ldots, (\varphi_N)^{N'_N} \right) \subset \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_k} \left(f_{\mathbf{i}_j(k)}^{M(j,k)} \right).$$

En combinant avec l'équation (2), on obtient :

$$\left((\varphi_1)^{N'_1}, \ldots, (\varphi_N)^{N'_N} \right) \subset \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_k} \left(f_{\mathbf{i}_j(k)}^{M(j,k)} \right) \subset (\varphi_1, \ldots, \varphi_N).$$

Donc :

$$V\left(\left((\varphi_1)^{N'_1},\ldots,(\varphi_N)^{N'_N}\right)\right) \supset V\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_k}\left(f_{\mathbf{i}_j(k)}^{M(j,k)}\right)\right) \supset V\left((\varphi_1,\ldots,\varphi_N)\right).$$

C'est-à-dire :

$$\bigcap_{i=1}^{N} V(\varphi_i) \subset \bigcap_{\substack{1\leq k\leq N\\ 1\leq j\leq n_k}} V\left(f_{\mathbf{i}_j(k)}^{M(j,k)}\right) \subset \bigcap_{i=1}^{N} V\left(\varphi_i^{N'_i}\right).$$

Le lemme 5.2 permet alors de conclure que

$$V(K) = X\setminus U = \bigcap_{\substack{1\leq k\leq N\\ 1\leq j\leq n_k}} V\left(f_{\mathbf{i}_j(k)}^{M(j,k)}\right).$$

Et donc que

$$U = \bigcup_{\substack{1\leq k\leq N\\ 1\leq j\leq n_k}} D\left(f_{\mathbf{i}_j(k)}^{M(j,k)}\right).$$

En particulier, U est réunion d'un sous recouvrement fini de (U_i). ■

5.2 Démonstration géométrique

C'est Antoine Ducros qui me l'a donnée quand je lui ai présenté la démonstration algébrique.

On utlise le lemme :

Lemme 5.3 *Soit S un schéma affine. Soit f une fonction globale. Alors $D(f)$ est un ouvert affine. En particulier, $D(f)$ est quasi compact.*

Démonstration : (du lemme)

Tout simplement, l'ouvert $D(f)$ est isomorphe au schéma Spec A_f. ■

Démonstration : (de la proposition 5.1)

On écrit que $U = X\setminus V(K) = X\setminus V(\varphi_1,\ldots,\varphi_N))$. Donc

$$U = X\setminus\left(\bigcap_{i\leq N} V(\varphi_i)\right) = \bigcup_{i\leq N}\left(X\setminus V(\varphi_i)\right) = \bigcup_{i\leq N} D(\varphi_i).$$

Ainsi, U est réunion finie de quasi-compacts et est donc quasi-compact. ■

Travail à faire 5.4 *Peut-on caractériser les ouverts d'un schéma affine qui sont quasi-compacts ?*