Sommes dans les catégories d'espaces annelés

Colas Bardavid

samedi 4 juin 2005

Table des matières

Résultats

Principe 0.1 *Un ouvert de* $X = \coprod_\alpha X_\alpha$*, c'est une famille d'ouverts des* X_α*.*

Principe 0.2 *Une fonction structurale sur l'ouvert* $(U_\alpha)_\alpha$*, c'est une famille de fonctions structurales sur les* U_α*.*

Questions en suspens et travail à faire

On note $\mathfrak{C}$ la catégorie des espaces annelés.
Soit $S_\alpha = (X_\alpha, \mathcal{O}_{X_\alpha})_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces annelés.
On va montrer que cette famille admet une somme dans $\mathfrak{C}$.

1 Construction de la somme

1.1 Espace topologique

Comme espace topologique sous-jacent, on prend la somme disjointe des X_α.

D'abord, si U est un ouvert de $X = \coprod_\alpha X_\alpha$, on note U_α la trace de U sur X_α, c'est-à-dire $\{x \in U_\alpha \mid (\alpha, x) \in U\}$.

On a une bijection :

$$\begin{array}{c} Ouv(X = \coprod_\alpha X_\alpha) \to \prod_\alpha Ouv(X_\alpha) \\ U \mapsto (U_\alpha)_\alpha \end{array} .$$

Autrement dit :

Principe 1.1 *Un ouvert de $X = \coprod_\alpha X_\alpha$, c'est une famille d'ouverts des X_α.*

1.2 Faisceau des fonctions structurales

Soit U un ouvert de X, c'est-à-dire une famille $(U_\alpha)_\alpha$ d'ouverts. Alors, l'anneau des fonctions structurales sur U c'est $\prod_\alpha \mathcal{O}_{X_\alpha}(U_\alpha)$.

Les restrictions, c'est le produit des restrictions sur chaque X_α.

On vérifie que c'est bien un faisceau (ce n'est pas bien compliqué, tout se réduit à vérifier des choses sur chaque X_α.)

D'où :

Principe 1.2 *Une fonction structurale sur l'ouvert $(U_\alpha)_\alpha$, c'est une famille de fonctions structurales sur les U_α.*

1.3 C'est bien la somme

Pareil, on vérifie que c'est bien la somme. Pour l'aspect topologique, c'est clair. Pour l'aspect faisceau structural, si on a $f_\alpha : X_\alpha \to S$ pour tout α, si U est un ouvert de S, on considère :

$$f_U^\# : \mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\coprod_\alpha f_\alpha^{-1}(U)) = \prod_\alpha \mathcal{O}_{S_\alpha}(f_\alpha^{-1}(U)),$$

qui est le produit des $f^\#_{\alpha\,U}$.

On vérifie que ça marche.

2 Cas particuliers

2.1 Espaces localement annelés

Si les S_α sont des espaces localement annelés, il en est de même pour leur somme. Donc, la catégorie des espaces localement annelés admet les sommes, construites identiquement.

2.2 Espaces modelés

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble d'espaces annelés, qu'on appelle les modèles. On dit l'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est modelé sur $\mathcal{M}$ si on peut recouvrir X par des ouverts U_i tels que les espaces annelés $(U_i, \mathcal{O}_X\ |_{U_i})$ soient chacun isomorphe à un objet de $\mathcal{M}$.

On note $\mathfrak{C}_{\mathcal{M}}$ la catégorie des espaces annelés modelés sur $\mathcal{M}$, qui est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}$.

Alors, $\mathfrak{C}_{\mathcal{M}}$ admet les sommes et la construction est identique.

2.3 Espaces localement annelés modelés

C'est la même chose sauf qu'à la base on se place dans la catégorie des espaces localement annelés.

La catégorie $\mathfrak{C}'_{\mathcal{M}}$ admet les sommes.

2.4 Cas particulier : les schémas

La catégorie des schémas est la catégorie des espaces localement annelés, modelés sur l'ensemble des schémas affine. En particulier, la catégorie des schémas admet les sommes, et les constructions sont identiques.