Suites exactes

Colas Bardavid
colas.bardavid (a) gmail.com

novembre 2006

Dans toute la suite, on travaille avec des groupes mais on aurait pu travailler dans la catégorie (A-Mod) des A-modules par exemple.

1 Définition

On dit qu'une suite $G_1 \xrightarrow[\varphi_1]{} G_2 \xrightarrow[\varphi_2]{} G_3$ est exacte si $\operatorname{Ker}\varphi_2 = \operatorname{Im}\varphi_1$.

2 Exemples

- $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow[f]{} G_2$ signifie que f est injective.
- $G_1 \xrightarrow[f]{} G_1 \longrightarrow 0$ signifie que f est surjective.
- $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow[f]{} G_2 \longrightarrow 0$ signifie que f est un isomorphisme.
- $0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow T \longrightarrow 0$ signifie que T est isomorphe à G/H.

3 Exemples de critères de finitude

$\mathbf{Z}^{*n}$ désigne le groupe libre à n éléments.

- $\mathbf{Z}^{*n} \longrightarrow G \longrightarrow 0$ signifie que G est finiment engendré par une partie à n éléments.
- $\mathbf{Z}^{*p} \xrightarrow[f]{} \mathbf{Z}^{*n} \longrightarrow G \longrightarrow 0$ signifie que G admet une présentation finie qui s'écrit :

  $$G \simeq \langle x_1, \ldots, x_n \mid f(s_1) = 1, \ldots f(s_p) = 1 \rangle \,,$$

  où on a désigné par s_i la « base » canonique de $\mathbf{Z}^{*p}$.
  Cette présentation de G peut néanmoins être encore « perfectionnée » car on ne sait pas comment les mots $f(s_1), \ldots, f(s_p)$ sont reliés entre eux, s'il y a des relations redondantes par exemple. Une meilleure présentation de G est donnée par ce qui suit.
- $\mathbf{Z}^{*q} \xrightarrow[g]{} \mathbf{Z}^{*p} \xrightarrow[f]{} \mathbf{Z}^{*n} \longrightarrow G \longrightarrow 0$ signifie que G admet une présentation du même type que ci-dessus mais que, de plus, on sait que les relations de liaison entre les mots $f(s_1), \ldots, f(s_p)$ sont engendrées les $g(t_j)$, où les t_j forment la base canonique de $\mathbf{Z}^{*q}$. Cela signifie que toutes les relations de liaison entre les mots $f(s_i)$ sont engendrées par les $g(t_j)$, où remplace les symboles s_i par les mots $f(s_i)$.

- Ainsi de suite...

4 Suites exactes scindées

On dit que la suite exacte $0 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow[f]{} T \longrightarrow 0$ est scindée si on peut trouver $i : T \to G$ tel que $f \circ i = \mathrm{Id}$. On notera alors :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r, dotted, shift right, "f"'] & T \arrow[l, shift right, "i"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La flèche f est mise en pointillés pour montrer qu'elle est composée en deuxième dans le diagramme.

Lorsqu'on a une telle suite, alors G est isormorphe au produit semi-direct $H \rtimes T$ où l'action de T sur H est donnée par

$$T \xrightarrow[i]{} G \xrightarrow[\mathrm{Int}]{} \mathrm{Int}\,(G) \xrightarrow[\text{restr.}]{} \mathrm{Aut}\,(H)\ .$$